

Урок 6. Уравнение и его корни

Алгебра, 7 класс · §3 · ~45 минут

Представь весы. На одной чаше — мешочек, в котором спрятано какое-то число (назовём его x), да ещё пара гирек. На другой — известный вес. Весы в равновесии. Вопрос: сколько весит мешочек? Чтобы это узнать, тебе не нужно его открывать — достаточно аккуратно снимать и добавлять гирьки одинаково с обеих сторон, пока мешочек не останется один. Вот это и есть решение уравнения. И сегодня ты научишься делать это по-настоящему грамотно.

Что ты узнаешь

- Что такое **уравнение**, **корень уравнения** и что значит «**решить уравнение**».
- Какие уравнения называют **равносильными**.
- Два главных **свойства уравнений**, на которых держится вообще всё решение.
- Как проверить, что ты нашёл корень правильно (и почему это стоит делать всегда).


Разбираемся в теме

Уравнение — это равенство, в котором есть буква (переменная), и нужно найти, при каком её значении равенство верно.

Например:

$$x + 4 = 9$$

Слева и справа стоят выражения, между ними знак « $=$ ». Слева есть неизвестное x . Это уравнение.


 **Правило.** Уравнение — это равенство, содержащее переменную, значение которой надо найти.

Корень уравнения — это такое значение переменной, при котором уравнение превращается в верное числовое равенство.

Проверим $x = 5$ в уравнении $x + 4 = 9$:

$5 + 4 = 9$ — верно. Значит, **5 — корень**.


А $x = 3$? $3 + 4 = 9 \rightarrow 7 = 9$ — неверно. Значит, 3 корнем **не является**.

 **Лайфхак.** Корень всегда можно проверить: подставь найденное число вместо буквы и посчитай. Если левая часть равна правой — корень верный. Это твой бесплатный «детектор ошибок».

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

«Все» — слово важное. У уравнения может быть:

- один корень (как у $x + 4 = 9$);
- несколько корней;
- ни одного корня (например, $x = x + 1$ — ни одно число не равно самому себе плюс единица);
- бесконечно много корней (например, $x + 0 = x$ — подходит любое число).


 **А знаешь ли ты?** Слово «уравнение» (и «равенство») происходит от слова «равный». А математики Древнего Востока решали уравнения ещё 4000 лет назад — правда, без буквы x : они записывали условия словами, целыми абзацами. Букву для неизвестного начали использовать гораздо позже. Цени, как тебе повезло — у тебя есть x .

Равносильные уравнения

Два уравнения называют **равносильными**, если у них одни и те же корни (или у обоих корней нет).


Например, $x - 2 = 3$ и $x = 5$ — равносильные: у обоих единственный корень 5.


Зачем это нужно? А вот зачем: решая уравнение, мы шаг за шагом заменяем его более простым, но **равносильным**. И так до тех пор, пока не получим самое простое — вида $x = \text{число}$. Главное — на каждом шаге не «потерять» и не «приобрести» корни. Для этого есть всего два надёжных приёма.

 **Свойство 1.** Любое слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую, **изменив его знак** на противоположный. Получится уравнение, равносильное данному.

Почему так? Перенести слагаемое — это то же самое, что прибавить (или вычесть) одно и то же число к обеим частям. Вернёмся к весам: если снять одинаковую гирьку с обеих чаш, равновесие сохранится.


$$x + 4 = 9 \quad x = 9 - 4 \text{ (перенесли } +4 \text{ вправо, оно стало } -4) \quad x = 5$$


 **Частая ошибка.** Переносят слагаемое и **забывают** поменять знак: пишут $x = 9 + 4 = 13$. Проверь: $13 + 4 = 17 \neq 9$. Знак менять обязательно!

 **Свойство 2.** Обе части уравнения можно умножить или разделить на **одно и то же число, не равное нулю**. Получится уравнение, равносильное данному.

Снова весы: если содержимое обеих чаш увеличить, скажем, в 3 раза, равновесие останется.

$$3x = 12 \quad 3x \div 3 = 12 \div 3 \text{ (разделили обе части на 3)} \quad x = 4$$

 **Частая ошибка.** Делить на ноль нельзя! Поэтому в свойстве 2 чётко сказано: число должно быть **не равно нулю**. Об этом ещё вспомним на следующем уроке.

 **Попробуй сам.** Является ли число 2 корнем уравнения $5x - 3 = 7$? Подставь и проверь. (Ответ: $5 \cdot 2 - 3 = 10 - 3 = 7$ — верно, да, корень.)



Разбор примеров

Пример 1. Является ли число -3 корнем уравнения $2x + 10 = 4$?

Решение. Подставим $x = -3$ в левую часть: $2 \cdot (-3) + 10 = -6 + 10 = 4$. Правая часть тоже 4. Левая равна правой.

Ответ: да, -3 — корень.

Пример 2. Реши уравнение $x + 7 = 12$.

Решение. Перенесём 7 вправо со сменой знака: $x = 12 - 7$ $x = 5$. Проверка: $5 + 7 = 12$ — верно.

Ответ: 5.

Пример 3. Реши уравнение $6x = 42$.

Решение. Разделим обе части на 6 (свойство 2): $6x \div 6 = 42 \div 6$ $x = 7$. Проверка: $6 \cdot 7 = 42$ — верно.

Ответ: 7.

Пример 4. Реши уравнение $4x - 5 = 11$.

Решение. Сначала перенесём -5 вправо (станет $+5$): $4x = 11 + 5$ $4x = 16$. Теперь разделим обе части на 4: $x = 16 \div 4 = 4$. Проверка: $4 \cdot 4 - 5 = 16 - 5 = 11$ — верно.

Ответ: 4.

Пример 5. Реши уравнение $7x - 2 = 3x + 10$.

Решение. Переменные соберём слева, числа — справа. Перенесём $3x$ влево (станет $-3x$), а -2 вправо (станет $+2$): $7x - 3x = 10 + 2$ $4x = 12$ $x = 3$. Проверка: слева $7 \cdot 3 - 2 = 19$; справа $3 \cdot 3 + 10 = 19$. Равны — верно.

Ответ: 3.

Пример 6. Равносильны ли уравнения $2x = 8$ и $x - 1 = 3$?

Решение. Решим каждое. Первое: $x = 8 \div 2 = 4$. Второе: $x = 3 + 1 = 4$. У обоих один и тот же корень — 4.

Ответ: да, равносильны.



Запомни главное

- **Уравнение** — равенство с переменной, которую надо найти.
- **Корень** — значение переменной, при котором равенство верно.
- **Решить** — значит найти все корни (или доказать, что их нет).
- **Равносильные** уравнения имеют одинаковые корни.
- **Свойство 1:** слагаемое переносят в другую часть, меняя знак.
- **Свойство 2:** обе части можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.
- Нашёл корень — **проверь подстановкой.**



Домашнее задание

1. Является ли число 6 корнем уравнения $x - 2 = 4$?
2. Является ли число -2 корнем уравнения $3x + 8 = 2$?
3. Реши уравнение: $x + 9 = 15$.
4. Реши уравнение: $x - 11 = -4$.
5. Реши уравнение: $8x = 56$.
6. Реши уравнение: $5x + 3 = 23$.
7. Реши уравнение: $9x - 4 = 4x + 16$.
8. Равносильны ли уравнения $3x = 15$ и $x + 2 = 8$?
9. ★ Подбери число a так, чтобы корнем уравнения $2x + a = 10$ было число 3.