Урок 7. Линейное уравнение с одной переменной

Алгебра, 7 класс · §3 · ~45 минут

На прошлом уроке ты решал уравнения по чуть-чуть, на интуиции: перенёс, разделил, проверил. А что, если я скажу, что почти все уравнения, которые ты будешь решать в этом году, можно загнать в один-единственный шаблон? Один вид, один алгоритм — и ты решаешь их как орешки. Этот шаблон называется **линейным уравнением**. Поехали разбираться.

🎯 Что ты узнаешь

- Что такое **линейное уравнение** и почему оно записывается как $ax = b$.
- **Алгоритм** решения любого линейного уравнения.
- Три случая: уравнение имеет **один корень**, **не имеет корней** или имеет **бесконечно много** корней.
- Как не попасть в ловушку с делением на ноль.

📖 Разбираемся в теме

Линейное уравнение с одной переменной — это уравнение вида

$ax = b$,

где x — переменная, а a и b — числа (их называют коэффициентами).

Почему «линейное»? Потому что переменная x здесь стоит **в первой степени** — без квадратов, без кубов, без корней, не в знаменателе. Просто x. Позже ты узнаешь, что такому уравнению на координатной плоскости соответствует прямая **линия** — отсюда и название.

Многие уравнения сначала не похожи на $ax = b$, но после переноса слагаемых и приведения подобных они **сводятся** к этому виду. Например:

$5x + 3 = 2x + 12$ $5x - 2x = 12 - 3$ $3x = 9$ ← вот оно, $ax = b$, где $a = 3$, $b = 9$.

📌 **Алгоритм решения линейного уравнения.**

1. Раскрой скобки, если они есть.
2. Перенеси все слагаемые с переменной в одну часть, а числа — в другую (со сменой знаков).
3. Приведи подобные слагаемые → получишь вид $ax = b$.
4. Раздели обе части на a (если $a \neq 0$). Получишь корень $x = b/a$.

Три случая

Вся хитрость — в последнем шаге. Что мы делим? Что получаем? Возможны три исхода.

Случай 1: $a \neq 0$ — один корень. Тогда спокойно делим: $x = b/a$. Ровно один корень. Это самый частый случай. Пример: $3x = 9 \to x = 9/3 = 3$.

Случай 2: $a = 0$, но $b \neq 0$ — корней нет. Получается $0 \cdot x = b$, где $b \neq 0$. Но $0 \cdot x$ при любом x равно 0, а не b. Равенство $0 = b$ неверно. Ни одно число не подходит. Пример: $0 \cdot x = 5$ → корней нет.

Случай 3: $a = 0$ и $b = 0$ — бесконечно много корней. Получается $0 \cdot x = 0$. Это верно при **любом** x: что ни подставь, слева 0 и справа 0. Пример: $0 \cdot x = 0$ → корень — любое число.

💡 **Лайфхак.** Свёл уравнение к виду $ax = b$ и видишь, что переменная вообще пропала (получилось что-то вроде $0 = 5$ или $7 = 7$)? Не пугайся — это не ошибка, это случай 2 или 3. Если осталось верное равенство ($7 = 7$) → корней бесконечно много; если неверное ($0 = 5$) → корней нет.

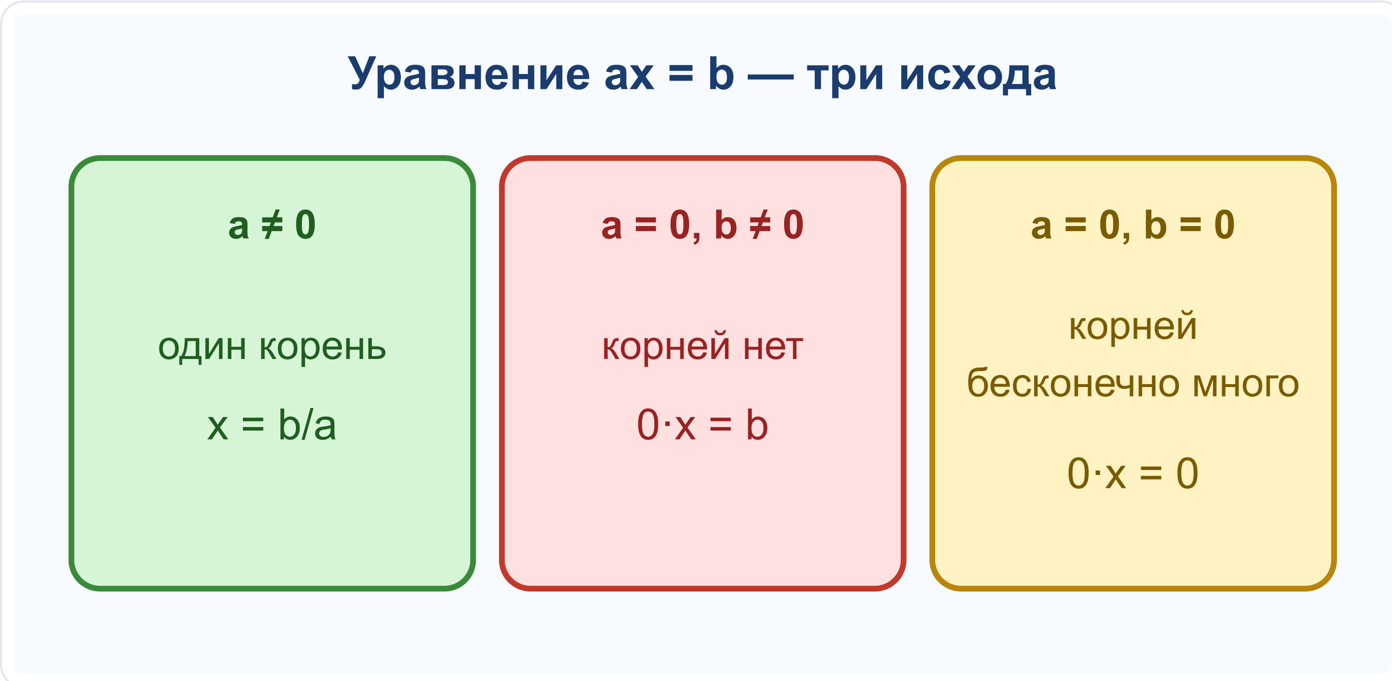

Рис. 1. Сколько корней у линейного уравнения — решает коэффициент a.

🤔 **А знаешь ли ты?** Случаи «нет корней» и «бесконечно много» поначалу кажутся странными — будто математика «сломалась». Но именно они спасают инженеров: если расчёт прочности моста сводится к $0 = 5$, значит, в условие закралась ошибка. А если к $0 = 0$ — значит, какой-то параметр можно выбрать свободно.

⚠️ **Частая ошибка.** Делить на a можно, только если $a \neq 0$. Никогда не пиши «$x = b/0$». Если a получилось нулём — сразу смотри на b и определяй случай 2 или 3.

⏱ **Попробуй сам.** К какому виду $ax = b$ сводится уравнение $4x + 1 = 4x + 1$? Что это за случай? *(Подсказка: перенеси всё с x влево.)*

✍️ Разбор примеров

Пример 1. Реши уравнение $7x = 35$.

Решение. Уже вид $ax = b$, $a = 7 \neq 0$. Делим обе части на 7: $x = 35 \div 7 = 5$. Проверка: $7 \cdot 5 = 35$. ✓

Ответ: 5.

Пример 2. Реши уравнение $6x - 4 = 2x + 12$.

Решение. Переносим: x — влево, числа — вправо. $6x - 2x = 12 + 4$ $4x = 16$ $x = 16 \div 4 = 4$. Проверка: слева $6 \cdot 4 - 4 = 20$; справа $2 \cdot 4 + 12 = 20$. ✓

Ответ: 4.

Пример 3. Реши уравнение $3(x - 2) = x + 8$.

Решение. Сначала раскроем скобки: $3x - 6 = x + 8$ $3x - x = 8 + 6$ $2x = 14$ $x = 7$. Проверка: слева $3 \cdot (7 - 2) = 3 \cdot 5 = 15$; справа $7 + 8 = 15$. ✓

Ответ: 7.

Пример 4. Реши уравнение $2x + 5 = 2x - 3$.

Решение. Переносим x влево, числа вправо: $2x - 2x = -3 - 5$ $0 \cdot x = -8$. Здесь $a = 0$, $b = -8 \neq 0$. Это случай 2.

Ответ: корней нет.

Пример 5. Реши уравнение $5(x + 1) = 5x + 5$.

Решение. Раскроем скобки: $5x + 5 = 5x + 5$ $5x - 5x = 5 - 5$ $0 \cdot x = 0$. Здесь $a = 0$ и $b = 0$ — случай 3.

Ответ: x — любое число (корней бесконечно много).

Пример 6. Реши уравнение $10 - 2(x - 3) = 4x - 2$.

Решение. Раскрываем скобки (внимательно со знаком минус перед скобкой): $10 - 2x + 6 = 4x - 2$ $16 - 2x = 4x - 2$. Переносим: $-2x - 4x = -2 - 16$ $-6x = -18$ $x =$

(–18) ÷ (–6) = 3. Проверка: слева 10 – 2·(3 – 3) = 10 – 0 = 10; справа 4·3 – 2 = 10. ✓

Ответ: 3.

💡 Запомни главное

- **Линейное уравнение** имеет вид ax = b (x в первой степени).
- **Алгоритм:** раскрыл скобки → собрал x в одну часть, числа в другую → привёл подобные → разделил на a.
- Три случая:
  - a ≠ 0 → **один корень** x = b/a;
  - a = 0, b ≠ 0 → **корней нет**;
  - a = 0, b = 0 → **бесконечно много корней**.
- На ноль делить нельзя — если a = 0, смотри на b.

📝 Домашнее задание

1. Реши уравнение: 4x = 28.
2. Реши уравнение: –3x = 21.
3. Реши уравнение: 5x + 2 = 17.
4. Реши уравнение: 8x – 1 = 3x + 14.
5. Реши уравнение: 2(x + 4) = 18.
6. Реши уравнение: 7x – 3 = 7x + 5.
7. Реши уравнение: 6(x – 1) = 6x – 6.
8. Реши уравнение: 4 – 3(x – 2) = x + 6.
9. ⭐ При каком значении a уравнение ax = 12 не имеет корней? А при каком имеет бесконечно много корней? (Подумай о значении b.)