

Урок 17. Умножение и деление степеней

Алгебра, 7 класс · §7 · ~45 минут

Что ты узнаешь

- Как перемножать степени с одинаковым основанием — не считая каждую отдельно.
- Как их делить — и почему показатели при этом вычитаются.
- Что такое a^0 и почему любое число в нулевой степени равно 1.

Разбираемся в теме

На прошлом уроке ты узнал, что степень — это короткая запись для повторного умножения. Сегодня мы научимся работать с самими степенями: складывать их (то есть перемножать) и делить. И тут есть пара очень красивых правил, которые сэкономят тебе кучу времени.


Умножение степеней

Допустим, нужно перемножить $a^2 \cdot a^3$. Распишем, что это значит:


$$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

Смотри: было 2 множителя «а», стало ещё 3, всего получилось 5. А $2 + 3 = 5$!

Показатели просто **сложились**.

 **Правило:** При умножении степеней с **одинаковыми основаниями** основание оставляют прежним, а показатели **складывают**: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

То есть $a^5 \cdot a^3 = a^8$, и $x^7 \cdot x = x^8$ (помни: x — это x^1).

 **Частая ошибка:** Это правило работает ТОЛЬКО при одинаковых основаниях! Запись $2^3 \cdot 5^2$ так не упростить — основания разные (2 и 5). А вот

основания складывать или перемножать НЕ нужно: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$, а не 4^7 !

🕒 Попробуй сам: упрости $a^4 \cdot a^6$ и $3^2 \cdot 3^3$.


Готов? $a^4 \cdot a^6 = a^{10}$. А $3^2 \cdot 3^3 = 3^5$ (основание 3 не трогаем, показатели $2 + 3 = 5$).

Деление степеней


С делением — обратная история. Распишем $a^5 : a^2$ (то же самое, что дробь a^5/a^2):

$$a^5 : a^2 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) / (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Две «а» в знаменателе сократились с двумя «а» сверху. Осталось $5 - 2 = 3$ множителя. Показатели **вычитаются!**

 **Правило:** При делении степеней с **одинаковыми основаниями** основание оставляют прежним, а из показателя делимого **вычитают** показатель делителя: $a^m : a^n = a^{m-n}$ (при условии $a \neq 0$).

Например, $a^8 : a^3 = a^5$, и $7^6 : 7^2 = 7^4$.


 **Лайфхак:** Умножение — показатели «+», деление — показатели «-». Запомни как «вверх складываем, вниз вычитаем».


Загадочная нулевая степень

А теперь фокус. Что будет, если разделить степень саму на себя? Например, $a^5 : a^5$.

С одной стороны, любое число (кроме нуля), делённое на само себя, равно 1. С другой стороны, по нашему правилу: $a^5 : a^5 = a^{5-5} = a^0$.

Получается, $a^0 = 1$! Чтобы правило деления работало всегда, математики договорились:

 **Правило:** Любое число (кроме нуля) в нулевой степени равно единице: $a^0 = 1$ (при $a \neq 0$). Например, $5^0 = 1$, $100^0 = 1$, $(-7)^0 = 1$.

 **А знаешь ли ты?** Выражение 0^0 математики оставляют без определённого значения — это особый «спорный» случай. А вот $0^5 = 0$ (ноль, умноженный на себя, остаётся нулём). Запрещён только сам ноль в нулевой степени.

Разбор примеров

Пример 1. Упрости: $c^4 \cdot c^7$.

Решение. Основания одинаковые (c), показатели складываем: $4 + 7 = 11$.

Ответ: c^{11} .

Пример 2. Упрости: $2^5 \cdot 2^3$ и запиши ответ степенью.

Решение. Основание 2 не меняем, показатели складываем: $5 + 3 = 8$.

Ответ: 2^8 .

Пример 3. Упрости: $x^{12} : x^5$.

Решение. Деление — показатели вычитаем: $12 - 5 = 7$.

Ответ: x^7 .

Пример 4. Упрости: $a^9 \cdot a : a^4$.

Решение. Идём слева направо. Помним, что $a = a^1$. Сначала умножение: $a^9 \cdot a^1 = a^{10}$. Теперь деление: $a^{10} : a^4 = a^6$.

Ответ: a^6 .

Пример 5. Найди значение выражения: $3^7 : 3^5$.

Решение. Показатели вычитаем: $7 - 5 = 2$. Получаем $3^2 = 9$.

Ответ: 9.

Пример 6. Упрости: $(b^6 \cdot b^2) : b^8$.

Решение. В скобке складываем показатели: $6 + 2 = 8$, получаем b^8 . Теперь $b^8 : b^8 = b^{8-8} = b^0 = 1$.

Ответ: 1.



Запомни главное

- Умножение: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (показатели складываем).
- Деление: $a^m : a^n = a^{m-n}$ (показатели вычитаем).
- $a^0 = 1$ (при $a \neq 0$).
- Правила работают только при **одинаковых основаниях**; само основание не меняется.



Домашнее задание

1. Упрости: $a^3 \cdot a^5$.
2. Упрости: $x^7 \cdot x$.
3. Упрости: $5^4 \cdot 5^2$ (ответ степенью).
4. Упрости: $b^9 : b^4$.
5. Найди значение: $2^8 : 2^5$.
6. Упрости: $c^6 \cdot c^3 : c^2$.
7. Вычисли: $(-6)^0 + 3^0$.
8. Упрости: $(m^5 \cdot m^4) : m^9$.
9. ☆ Найди значение выражения: $(2^4 \cdot 2^3) : 2^5 + 7^0$.