

Урок 18. Возведение в степень произведения и степени

Алгебра, 7 класс · §7 · ~45 минут

Что ты узнаешь

- Как возвести в степень произведение: $(ab)^n$.
- Как возвести степень в степень: $(a^m)^n$ — и почему здесь показатели перемножаются.
- Как не путать это правило с тем, что было на прошлом уроке.

Разбираемся в теме

У нас уже есть два правила: степени умножают, складывая показатели, и делят, вычитая. Сегодня добавим ещё два — про возведение в степень. И снова всё начнётся с того, что мы просто **распишем** запись и посмотрим, что получится.

Степень произведения


Что значит $(ab)^3$? Это произведение ab , взятое множителем три раза:

$$(ab)^3 = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$$


А умножение можно переставлять как угодно. Соберём отдельно все «а» и все «b»:


$$(ab)^3 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^3$$

Здорово! Каждый множитель просто возвели в эту степень.

 **Правило:** При возведении произведения в степень в эту степень возводят **каждый множитель**: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

Например, $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$, и $(xy)^5 = x^5y^5$.

 **Лайфхак:** Степень «раздаётся» каждому множителю в скобках, как конфеты — поровну всем. Не забудь возвести в степень и числовой множитель: в $(3a)^2$ тройка тоже идёт в квадрат, получается $9a^2$, а не $3a^2$.

 **Частая ошибка:** Это правило только для **произведения!** Для суммы оно НЕ работает: $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$. Проверь: $(2 + 3)^2 = 25$, а $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$. Совсем разные числа!

 Попробуй сам: возведи $(5y)^2$ и $(abc)^3$.


Готов? $(5y)^2 = 25y^2$. А $(abc)^3 = a^3b^3c^3$ (правило работает и для трёх множителей).

Возведение степени в степень


Теперь второй случай. Что такое $(a^2)^3$ — степень, возведённая ещё в степень? Распишем:

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^6$$

Множитель a^2 взяли три раза, и показатели сложились: $2 + 2 + 2 = 6$. Но три раза прибавить 2 — это то же самое, что умножить $2 \cdot 3 = 6$! Значит, показатели можно просто **перемножить**.

 **Правило:** При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели **перемножают**: $(a^m)^n = a^{mn}$.


Например, $(x^3)^4 = x^{12}$ и $(2^5)^2 = 2^{10}$.

 **Частая ошибка:** Не путай два правила!

- **Умножаешь** степени \rightarrow показатели **складываешь**: $a^2 \cdot a^3 = a^5$.
- **Возводишь** степень в степень \rightarrow показатели **умножаешь**: $(a^2)^3 = a^6$.
Разница в скобках: $a^2 \cdot a^3$ — это умножение, $(a^2)^3$ — возведение в степень.

 Попробуй сам: упрости $(a^4)^5$ и сравни $a^2 \cdot a^4$ с $(a^2)^4$.

Готов? $(a^4)^5 = a^{20}$. А $a^2 \cdot a^4 = a^6$ (сложили), но $(a^2)^4 = a^8$ (умножили) — результаты разные!

 **А знаешь ли ты?** Все четыре правила степеней можно объединять в одной задаче. Например, $(2a^3)^4 = 2^4 \cdot (a^3)^4 = 16 \cdot a^{12} = 16a^{12}$. Сначала раздали степень каждому множителю, потом возвели степень в степень.

Разбор примеров

Пример 1. Возведи в степень: $(3x)^2$.

Решение. Степень получает каждый множитель: $3^2 \cdot x^2 = 9x^2$.

Ответ: $9x^2$.

Пример 2. Возведи в степень: $(abc)^4$.

Решение. Каждый множитель в четвёртую степень: $a^4b^4c^4$.

Ответ: $a^4b^4c^4$.

Пример 3. Упрости: $(y^5)^3$.

Решение. Степень в степень — показатели перемножаем: $5 \cdot 3 = 15$.

Ответ: y^{15} .

Пример 4. Упрости: $(a^2)^4 \cdot a^3$.

Решение. Сначала возведение степени в степень: $(a^2)^4 = a^8$. Теперь умножение степеней — показатели складываем: $a^8 \cdot a^3 = a^{11}$.

Ответ: a^{11} .

Пример 5. Возведи в степень: $(2x^3)^5$.

Решение. Степень получает каждый множитель: $2^5 \cdot (x^3)^5$. Считаем: $2^5 = 32$, а $(x^3)^5 = x^{15}$ (показатели $3 \cdot 5 = 15$).

Ответ: $32x^{15}$.

Пример 6. Упрости: $(x^2)^3 \cdot (x^4)^2$.

Решение. Каждую скобку возводим в степень: $(x^2)^3 = x^6$ и $(x^4)^2 = x^8$. Теперь перемножаем степени — показатели складываем: $x^6 \cdot x^8 = x^{14}$.

Ответ: x^{14} .



Запомни главное

- Степень произведения: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ (степень получает каждый множитель).
- Степень в степени: $(a^m)^n = a^{mn}$ (показатели перемножаем).
- Для **суммы** правило не годится: $(a + b)^n \neq a^n + b^n$.
- Не путай: **умножение** степеней — складываем показатели; **возведение** в степень — умножаем.



Домашнее задание

1. Возведи в степень: $(4x)^2$.
2. Возведи в степень: $(xyz)^2$.
3. Упрости: $(a^3)^5$.
4. Упрости: $(2^4)^2$.
5. Возведи в степень: $(3a^2)^3$.
6. Упрости: $(b^3)^2 \cdot b^5$.
7. Упрости: $(c^4)^3 : c^7$.
8. Возведи в степень: $(5xy^2)^2$.
9. ☆ Упрости: $(a^2)^4 \cdot (a^3)^2 : a^{13}$.