

Урок 20. Функции $y = x^2$ и $y = x^3$ и их графики

Алгебра, 7 класс · §8 · ~45 минут

Что ты узнаешь

- Как выглядят графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$.
- Что такое парабола и кубическая парабола и какие у них свойства.
- Как по графику находить значения и читать поведение функции.

Разбираемся в теме

Ты уже умеешь возводить числа в квадрат и в куб. А что, если подставлять в x^2 не одно число, а *все подряд*, и каждый раз отмечать точку на координатной плоскости? Получится не отдельная точка, а целая линия — **график функции**. И у двух наших старых знакомых, x^2 и x^3 , графики удивительно красивые.

Функция $y = x^2$

Возьмём функцию $y = x^2$ и составим таблицу значений. Для каждого x считаем его квадрат:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Заметил? При $x = 2$ и при $x = -2$ получается одно и то же значение $y = 4$. Это потому, что квадрат «съедает» минус: $(-2)^2 = 2^2$. Если отметить все точки и соединить плавной линией, получится симметричная чаша — **парабола**.

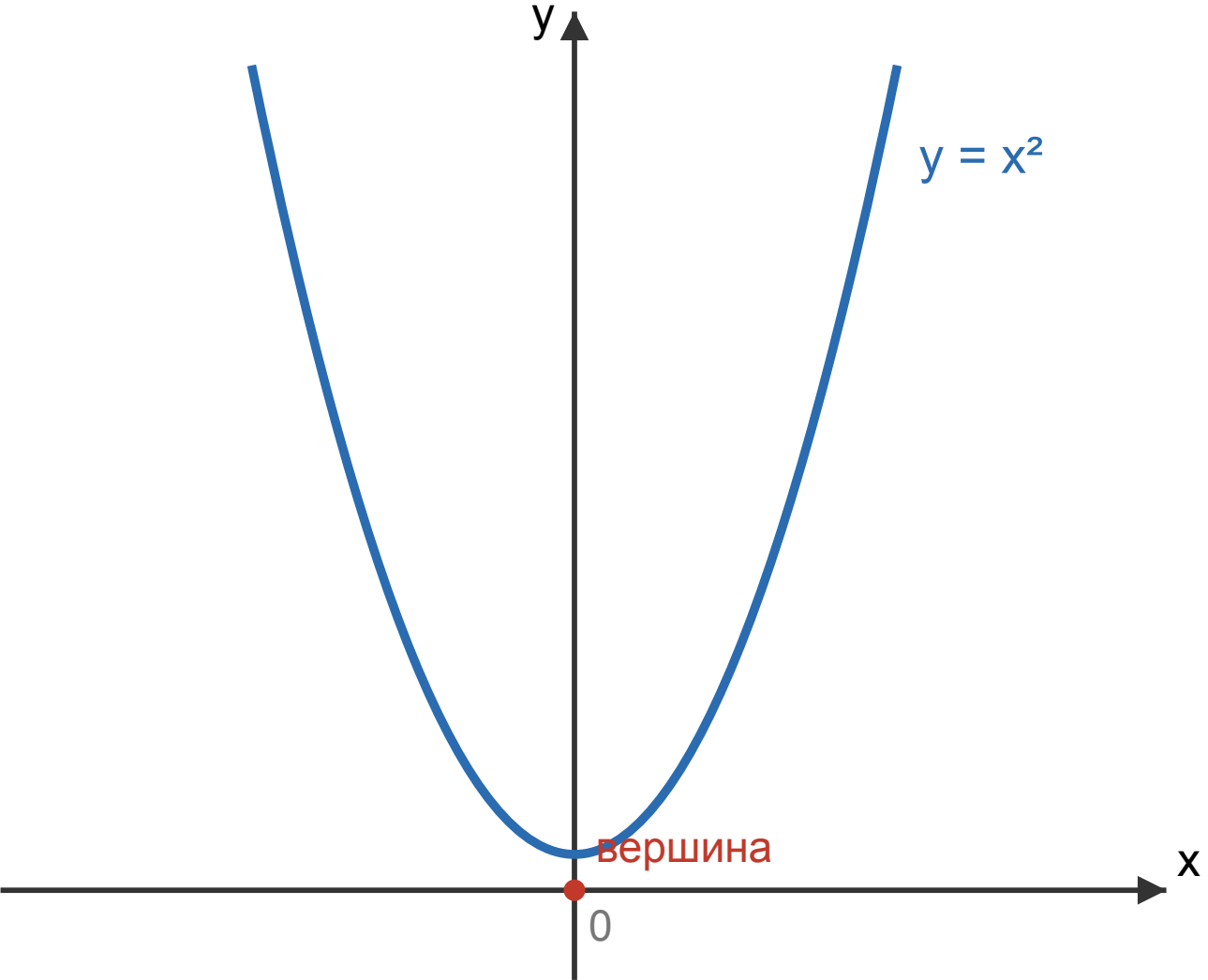




Рис. 1. Парабола $y = x^2$ — её вершина в начале координат

 **Правило (свойства параболы $y = x^2$):**

- Проходит через начало координат $(0; 0)$ — это её **вершина**.
- Расположена **выше оси x** (или на ней): y всегда ≥ 0 .
- **Симметрична** относительно оси y (левая и правая ветви — зеркальные).
- Чем дальше от нуля, тем круче ветви идут вверх.

 **Лайфхак:** Чтобы построить параболу, хватит нескольких точек справа от оси y , а левую половину просто отрази зеркально — она такая же.

 Попробуй сам: пользуясь графиком или формулой, найди y при $x = 1,5$. И при каких x значение $y = 9$?

Готов? $y = 1,5^2 = 2,25$. А $y = 9$ при $x = 3$ и при $x = -3$ (две точки, ветви симметричны).

Функция $y = x^3$

Теперь куб. Составим таблицу для $y = x^3$:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

Тут всё иначе! Куб **сохраняет** знак: при отрицательных x значения отрицательные, при положительных — положительные. График — плавная линия, которая «изгибается» через начало координат. Её называют **кубической параболой**.

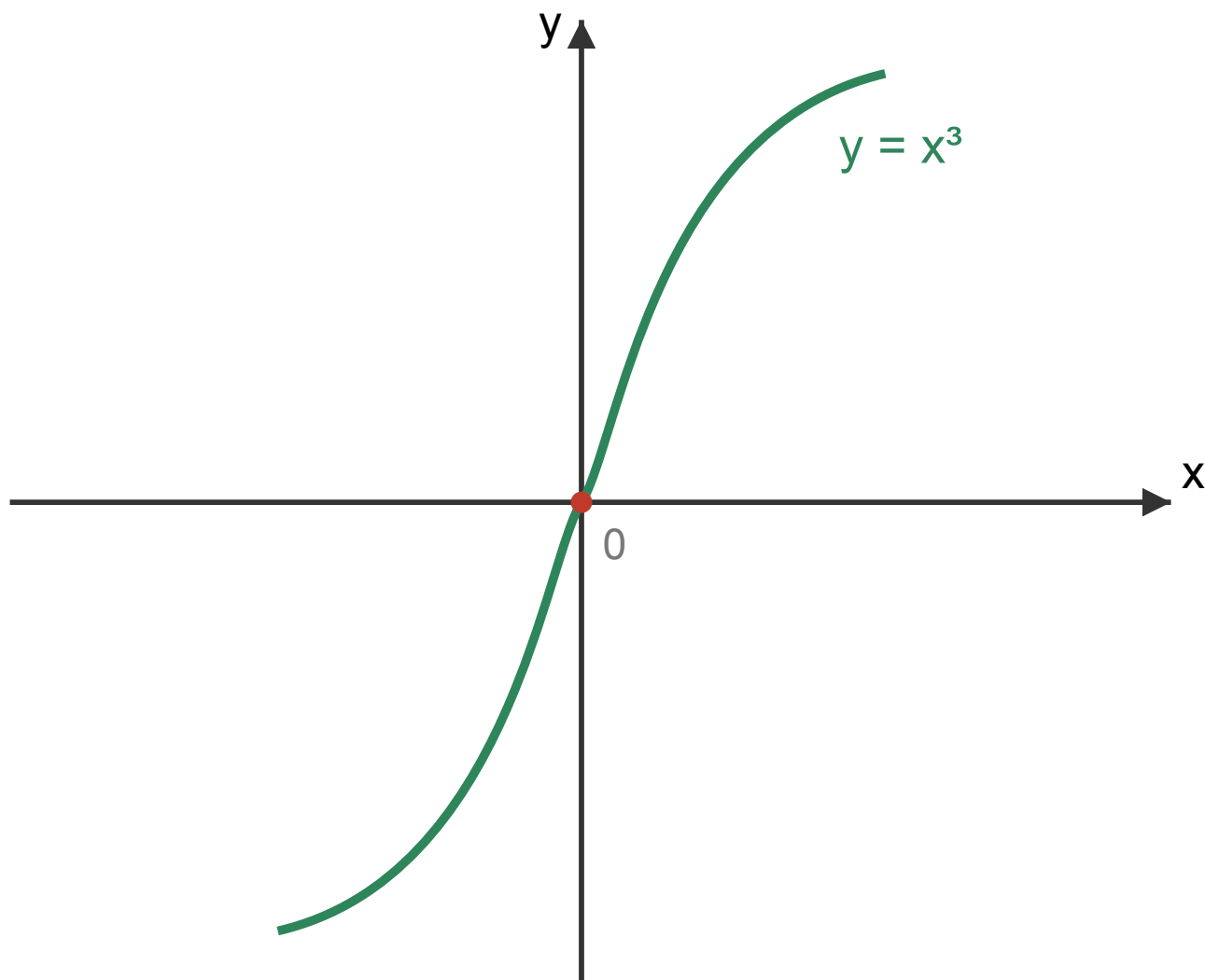


Рис. 2. Кубическая парабола $y = x^3$ — проходит через начало координат

 **Правило (свойства кубической параболы $y = x^3$):**

- Проходит через начало координат $(0; 0)$.
- При $x > 0$ значения **положительные**, при $x < 0$ — **отрицательные**.
- **Симметрична относительно начала координат** (если повернуть график на 180° вокруг точки 0 , он совпадёт сам с собой).
- Чем больше x , тем быстрее (круче, чем у параболы) растёт y .

⚠ Частая ошибка: Не путай графики! Парабола (x^2) — это «чаша», обе ветви смотрят вверх. Кубическая парабола (x^3) уходит вниз слева и вверх справа — она проходит «насквозь» через начало координат.

🤔 А знаешь ли ты? Парабола — не просто фигура из учебника. По параболе летит брошенный мяч, по ней делают зеркала автомобильных фар и «тарелки» спутниковых антенн: параболическая форма собирает все лучи в одну точку — фокус.

Как читать график

График — это не картинка для красоты, а удобный «калькулятор». Хочешь узнать y при заданном x ? Найди x на горизонтальной оси, поднимись до кривой, потом сдвинься к оси y — там и будет ответ. Можно и наоборот: по значению y найти, при каких x оно достигается.



Разбор примеров

Пример 1. Принадлежит ли точка $(-2; 4)$ графику функции $y = x^2$?

Решение. Подставим $x = -2$ в формулу: $y = (-2)^2 = 4$. Получили именно 4 — совпало.

Ответ: да, принадлежит.

Пример 2. Принадлежит ли точка $(3; 6)$ графику функции $y = x^2$?

Решение. Подставим $x = 3$: $y = 3^2 = 9$, а не 6.

Ответ: нет, не принадлежит.

Пример 3. Найди по формуле значение функции $y = x^3$ при $x = -3$.

Решение. $y = (-3)^3 = -27$ (нечётная степень сохраняет минус).

Ответ: -27 .

Пример 4. При каких значениях x функция $y = x^2$ принимает значение 25?

Решение. Нужно $x^2 = 25$. Это верно для $x = 5$ ($5^2 = 25$) и для $x = -5$ ($(-5)^2 = 25$).
Парабола симметрична — два ответа.

Ответ: $x = 5$ и $x = -5$.

Пример 5. При каком значении x функция $y = x^3$ принимает значение 8?

Решение. Нужно $x^3 = 8$. Подходит только $x = 2$ ($2^3 = 8$). Для куба значение даёт лишь один x .

Ответ: $x = 2$.

Пример 6. Точка $(a; 64)$ лежит на графике $y = x^3$. Может ли a быть отрицательным?

Решение. Если $a < 0$, то a^3 тоже отрицательно, а $64 > 0$. Значит, a должно быть положительным: $a^3 = 64$ при $a = 4$.

Ответ: нет, $a = 4$ (положительное).



Запомни главное

- $y = x^2$ — парабола: «чаша» с вершиной в $(0; 0)$, вся выше оси x , симметрична относительно оси y .
- $y = x^3$ — кубическая парабола: проходит через $(0; 0)$, симметрична относительно начала координат, сохраняет знак x .
- Уравнение $x^2 = c$ (при $c > 0$) даёт **два** значения x ; уравнение $x^3 = c$ — **одно**.
- Чтобы проверить, лежит ли точка на графике, подставь её x в формулу и сравни результат с y .



Домашнее задание

1. Заполни таблицу значений $y = x^2$ для $x = -3, -1, 0, 1, 3$.
2. Принадлежит ли точка $(-4; 16)$ графику $y = x^2$?
3. Принадлежит ли точка $(2; 6)$ графику $y = x^2$?
4. Найди значение функции $y = x^3$ при $x = 4$.

5. Найди значение функции $y = x^3$ при $x = -2$.
6. При каких x функция $y = x^2$ принимает значение 49?
7. При каком x функция $y = x^3$ принимает значение -27 ?
8. Точка $(3; b)$ лежит на графике $y = x^2$. Найди b .
9. ★ На графике $y = x^2$ отметили две точки с одинаковым $y = 36$. Найди их координаты и объясни, почему их две.