

# Урок 27. Возведение в квадрат суммы и разности

Алгебра, 7 класс · §12 · ~45 минут

## Что ты узнаешь

- Две главные формулы главы:  $(a + b)^2$  и  $(a - b)^2$ .
- Почему в середине обязательно появляется удвоенное произведение  $2ab$ .
- Как с помощью этих формул считать в уме то, что другие считают в столбик (например,  $51^2$ ).
- Геометрический смысл — увидишь формулу глазами на картинке.

## Разбираемся в теме

Представь, что тебя на спор попросили возвести в квадрат число 32. В уме. За пять секунд. Большинство людей начнут потеть и тянуться к телефону. А ты после этого урока спокойно скажешь: «1024». И будешь прав.

Секрет в формулах **сокращённого умножения**. Они называются так, потому что позволяют не перемножать длинные скобки каждый раз, а сразу писать ответ по шаблону.


Начнём с самого важного. Что такое  $(a + b)^2$ ? Это всего лишь  $(a + b)$  умножить само на себя:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$

Раскроем скобки честно, «каждый с каждым»:


$$(a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Видишь, что произошло? Появились два одинаковых слагаемых  $ab + ab$ , и они слились в  $2ab$ .

 **Правило (квадрат суммы):**  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  «Квадрат первого, плюс удвоенное произведение первого на второе, плюс квадрат второго.»

Точно так же раскрывается и квадрат разности. Разница только в знаке среднего члена:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

 **Правило (квадрат разности):**  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  «Квадрат первого, минус удвоенное произведение, плюс квадрат второго.»

Обрати внимание: последний член **всегда со знаком плюс!** Ведь  $b^2$  — это квадрат, а квадрат не бывает отрицательным. Минус прячется только в середине.

### Геометрический смысл

Формулу  $(a + b)^2$  можно не только вывести, но и **увидеть**. Возьмём квадрат со стороной  $(a + b)$ . Его площадь и есть  $(a + b)^2$ . А теперь разрежем эту сторону на кусочек  $a$  и кусочек  $b$  — квадрат распадётся на 4 части.

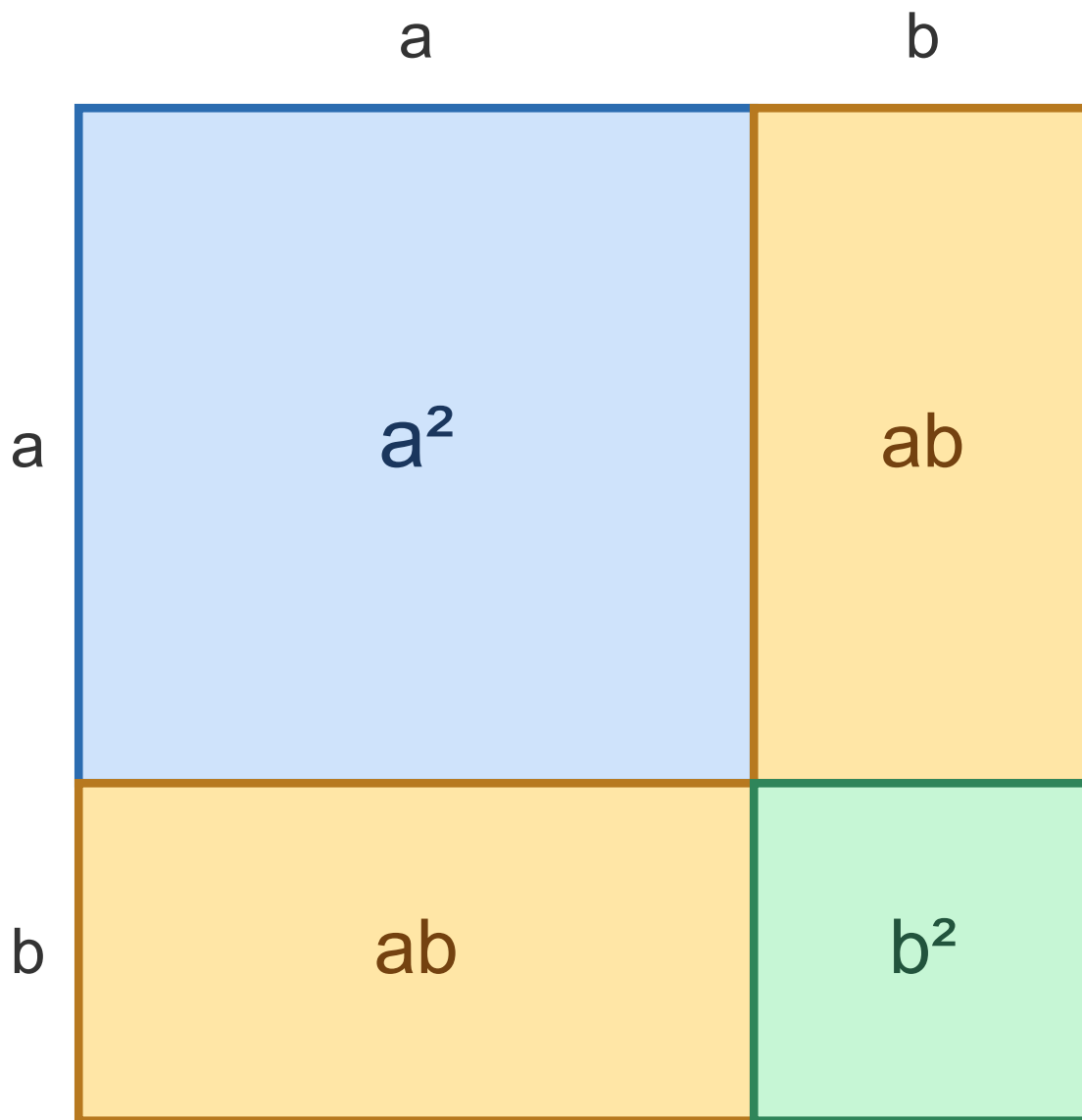




Рис. 1. Геометрический смысл формулы  $(a + b)^2$

Сложим площади всех кусочков: большой синий квадрат  $a^2$ , маленький зелёный  $b^2$  и два жёлтых прямоугольника  $ab + ab = 2ab$ . Итого:  $a^2 + 2ab + b^2$ . Вот откуда берётся «удвоенное произведение» — это просто два одинаковых прямоугольника по краям!

 **Лайфхак:** Средний член  $2ab$  забывают чаще всего. Запомни намертво:  $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ . Если бы это было так, картинка состояла бы только из двух квадратов, а два жёлтых прямоугольника бесследно исчезли. Так не бывает.

 Попробуй сам: раскрой  $(x + 3)^2$ . Подсказка: здесь  $a = x$ ,  $b = 3$ .

Готов?  $a^2 = x^2$ ,  $2ab = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$ ,  $b^2 = 9$ . Ответ:  $x^2 + 6x + 9$ .


### Быстрый счёт в уме

А теперь обещанный фокус. Чтобы возвести в квадрат «неудобное» число, разложи его на круглое число плюс/минус остаток.

$$51^2 = (50 + 1)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 = 2500 + 100 + 1 = \mathbf{2601}$$

$$49^2 = (50 - 1)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 = 2500 - 100 + 1 = \mathbf{2401}$$

Никакого столбика! Просто формула.

 **А знаешь ли ты?** Эти формулы знали ещё древние греки — у Евклида в «Началах» (III век до н. э.) они записаны словами и доказаны именно через площади квадратов, как на нашем рисунке. Буквенной записи  $a$  и  $b$  тогда не было — её придумали почти через 2000 лет.

### Разбор примеров

**Пример 1.** Возведи в квадрат:  $(x + 5)^2$ .

*Решение.* Здесь  $a = x$ ,  $b = 5$ .

- Квадрат первого:  $x^2$ .
- Удвоенное произведение:  $2 \cdot x \cdot 5 = 10x$ .
- Квадрат второго:  $5^2 = 25$ .

**Ответ:**  $x^2 + 10x + 25$ .

**Пример 2.** Возведи в квадрат:  $(a - 7)^2$ .

*Решение.* Формула квадрата разности, средний член со знаком минус.

- $a^2$ ;
- $-2 \cdot a \cdot 7 = -14a$ ;
- $(-7)^2 = 49$  (квадрат всегда плюс).

**Ответ:**  $a^2 - 14a + 49$ .

**Пример 3.** Возведи в квадрат:  $(3x + 2)^2$ .

*Решение.* Теперь «первое» — это весь  $3x$ , «второе» —  $2$ .

- $(3x)^2 = 9x^2$ ;
- $2 \cdot (3x) \cdot 2 = 12x$ ;
- $2^2 = 4$ .

**Ответ:**  $9x^2 + 12x + 4$ .

**Пример 4.** Возведи в квадрат:  $(4 - 5y)^2$ .

*Решение.*  $a = 4$ ,  $b = 5y$ .

- $4^2 = 16$ ;
- $-2 \cdot 4 \cdot 5y = -40y$ ;
- $(5y)^2 = 25y^2$ .

**Ответ:**  $16 - 40y + 25y^2$ .

**Пример 5.** Вычисли с помощью формулы:  $102^2$ .

*Решение.*  $102 = 100 + 2$ .  $102^2 = (100 + 2)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$ .

**Ответ:** 10404.

**Пример 6.** Вычисли с помощью формулы:  $98^2$ .

*Решение.*  $98 = 100 - 2$ .  $98^2 = (100 - 2)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$ .

**Ответ:** 9604.



## Запомни главное

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  — квадрат суммы.
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  — квадрат разности.
- Средний член — **удвоенное произведение**  $2ab$ ; именно его чаще всего забывают.
- Последний член (квадрат) **всегда со знаком плюс**.
- Для счёта в уме раскладывай число на круглое  $\pm$  остаток:  $51^2 = (50 + 1)^2$ .



## Домашнее задание

1. Возведи в квадрат:  $(x + 4)^2$ .
2. Возведи в квадрат:  $(b - 6)^2$ .
3. Возведи в квадрат:  $(2a + 3)^2$ .
4. Возведи в квадрат:  $(5 - x)^2$ .
5. Возведи в квадрат:  $(3m - 4n)^2$ .
6. Вычисли с помощью формулы:  $41^2$ .
7. Вычисли с помощью формулы:  $99^2$ .
8. Найди ошибку: ученик написал  $(x + 6)^2 = x^2 + 36$ . Исправь.
9. ☆ Упрости:  $(x + 3)^2 + (x - 3)^2$ .