Урок 29. Умножение разности на сумму

Алгебра, 7 класс · §13 · ~45 минут

🎯 Что ты узнаешь

- Самую красивую формулу главы: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
- Почему при перемножении «разность на сумму» средние члены волшебным образом исчезают.
- Как с её помощью считать в уме произведения вроде $49 \cdot 51$ быстрее, чем нажимать кнопки калькулятора.

📖 Разбираемся в теме

Бывают формулы рабочие, а бывают — изящные. Эта — вторая. Смотри, что произойдёт, если перемножить две почти одинаковые скобки: одну с минусом, другую с плюсом.

$(a - b)(a + b)$

Раскроем «каждый с каждым»:

$(a - b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b - b \cdot a - b \cdot b = a^2 + ab - ab - b^2$

Замечаешь? Средние члены $+ab$ и $-ab$ — противоположны и **сокращаются**! Остаётся только:

$a^2 - b^2$

> 📌 **Правило (разность квадратов):** $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ «Произведение разности двух выражений на их сумму равно разности их квадратов.»

Вот и весь секрет: два средних слагаемых всегда уничтожают друг друга, потому что одно с плюсом, другое с минусом, а сами они одинаковы по модулю. Никакого $2ab$ здесь нет — не путай с квадратом суммы!

⚠️ **Частая ошибка:** Формула работает, только если скобки отличаются ТОЛЬКО знаком между членами. $(a - b)(a + b)$ — да. А вот $(a - b)(a - b)$ — это уже квадрат разности $(a - b)^2$, совсем другая формула! Проверяй знаки.

⏱️ Попробуй сам: перемножь $(x - 4)(x + 4)$.

Готов? Это разность квадратов: $a = x$, $b = 4$. Получаем $x^2 - 4^2 = x^2 - 16$. И всё — никаких средних членов.

Считаем в уме

Здесь формула показывает настоящую магию. Хочешь быстро умножить 49 на 51? Заметь, что это $(50 - 1)(50 + 1)$ — разность и сумма вокруг числа 50!

$49 \cdot 51 = (50 - 1)(50 + 1) = 50^2 - 1^2 = 2500 - 1 = \mathbf{2499}$

Пока сосед достаёт калькулятор, ты уже назвал ответ.

💡 **Лайфхак:** Ищи «пару чисел вокруг круглого». $38 \cdot 42 = (40 - 2)(40 + 2) = 1600 - 4 = 1596$. $97 \cdot 103 = (100 - 3)(100 + 3) = 10000 - 9 = 9991$. Главное — чтобы числа были симметричны относительно круглого.

🤔 **А знаешь ли ты?** Этот же приём — основа одного из старинных методов разложения больших чисел на множители (метод Ферма, XVII век). Если число можно записать как $a^2 - b^2$, то оно сразу раскладывается в $(a - b)(a + b)$. Так когда-то взламывали «секретные» числа задолго до компьютеров.

✍️ Разбор примеров

Пример 1. Перемножь: $(x - 6)(x + 6)$.

Решение. Разность на сумму, $a = x$, $b = 6$: $x^2 - 6^2 = x^2 - 36$.

Ответ: $x^2 - 36$.

Пример 2. Перемножь: $(3a - 5)(3a + 5)$.

Решение. a = 3a, b = 5. Квадрат первого: $(3a)^2 = 9a^2$. Квадрат второго: $5^2 = 25$.

Ответ: $9a^2 - 25$.

Пример 3. Перемножь: $(2x - 7y)(2x + 7y)$.

Решение. «Первое» = 2x, «второе» = 7y. $(2x)^2 = 4x^2$, $(7y)^2 = 49y^2$.

Ответ: $4x^2 - 49y^2$.

Пример 4. Перемножь: $(10 + b)(10 - b)$.

Решение. Порядок скобок не важен — лишь бы одна с плюсом, другая с минусом. $10^2 - b^2 = 100 - b^2$.

Ответ: $100 - b^2$.

Пример 5. Вычисли с помощью формулы: $58 \cdot 62$.

Решение. 58 и 62 симметричны вокруг 60: $(60 - 2)(60 + 2) = 60^2 - 2^2 = 3600 - 4 = 3596$.

Ответ: 3596.

Пример 6. Упрости: $(x - 3)(x + 3) + 9$.

Решение. Сначала разность квадратов: $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$. Затем $x^2 - 9 + 9 = x^2$.

Ответ: x^2.

💡 Запомни главное

- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ — произведение разности на сумму равно разности квадратов.
- Средние члены +ab и −ab всегда сокращаются — никакого 2ab здесь нет.
- Скобки должны отличаться только знаком; $(a - b)(a - b)$ — это другое!
- Для счёта ищи числа, симметричные вокруг круглого: $49 \cdot 51 = 50^2 - 1$.

📝 Домашнее задание

1. Перемножь: $(x - 8)(x + 8)$.
2. Перемножь: $(a + 1)(a - 1)$.
3. Перемножь: $(5x - 2)(5x + 2)$.
4. Перемножь: $(4a - 3b)(4a + 3b)$.
5. Перемножь: $(7 + 2y)(7 - 2y)$.
6. Вычисли с помощью формулы: $39 \cdot 41$.
7. Вычисли с помощью формулы: $95 \cdot 105$.
8. Упрости: $(a - 5)(a + 5) - a^2$.
9. ⭐ Упрости: $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.