

Урок 31. Сумма и разность кубов


Алгебра, 7 класс · §13 · ~45 минут


Что ты узнаешь

- Две формулы-«близнецы»: сумму и разность кубов.
- Что такое «неполный квадрат» и чем он отличается от полного.
- Хитрое правило знаков: где плюс, где минус — и как не перепутать.

Разбираемся в теме

Квадраты ты уже приручил. Поднимаемся на этаж выше — к кубам. Оказывается, сумму и разность кубов тоже можно разложить на множители. Но формулы здесь чуть длиннее и хитрее, поэтому держим ухо востро.

 **Правило (сумма кубов):** $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

 **Правило (разность кубов):** $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Давай проверим первую раскрытием, чтобы ты поверил:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$

Члены $-a^2b$ и $+a^2b$ сокращаются, $+ab^2$ и $-ab^2$ тоже сокращаются. Остаётся $a^3 + b^3$. Работает!

Неполный квадрат

Большая скобка $a^2 - ab + b^2$ называется **неполным квадратом разности**.

Сравни:

- Полный квадрат разности: $a^2 - 2ab + b^2$ (помнишь, с двойкой?).
- Неполный квадрат разности: $a^2 - ab + b^2$ (без двойки!).

Слово «неполный» как раз и значит «без удвоения» — в середине просто ab , а не $2ab$.

⚠ Частая ошибка: В большой скобке стоит ab , а НЕ $2ab$! Двойка — только в формулах квадратов. Если ты напишешь $(a + b)(a^2 - 2ab + b^2)$ — формула сломается, проверь сам.

Правило знаков (самое важное!)

В этих формулах три знака, и их легко перепутать. Запомни закономерность:

💡 Лайфхак: Первая скобка повторяет знак исходного выражения (куб суммы → плюс, куб разности → минус). А в большой скобке средний член имеет **противоположный** знак. Коротко: «знаки чередуются».

- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Видишь? + потом −, и наоборот: − потом +. Это и есть значок \mp в общей записи $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

🕒 Попробуй сам: разложи $x^3 + 8$. Подсказка: $8 = 2^3$, так что $a = x$, $b = 2$.

Готов? Сумма кубов: $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$. Первая скобка с плюсом, средний член большой скобки с минусом.

🤔 А знаешь ли ты? Сумму двух кубов нельзя получить, сложив два «настоящих» куба больше нуля так, чтобы вышел третий куб: уравнение $a^3 + b^3 = c^3$ не имеет решений в целых числах. Это частный случай знаменитой Великой теоремы Ферма, которую математики не могли доказать 358 лет — её закрыли только в 1994 году!

 **Разбор примеров**

Пример 1. Разложи на множители: $x^3 + 27$.

Решение. $27 = 3^3$, значит $a = x$, $b = 3$. Сумма кубов: первая скобка $(x + 3)$, большая — неполный квадрат разности $x^2 - x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 3x + 9$.

Ответ: $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$.

Пример 2. Разложи на множители: $a^3 - 1$.

Решение. $1 = 1^3$, $a = a$, $b = 1$. Разность кубов: $(a - 1)(a^2 + a \cdot 1 + 1^2) = (a - 1)(a^2 + a + 1)$.

Ответ: $(a - 1)(a^2 + a + 1)$.

Пример 3. Разложи на множители: $8x^3 + 1$.

Решение. $8x^3 = (2x)^3$, $1 = 1^3$. Здесь $a = 2x$, $b = 1$. Сумма кубов:

- первая скобка: $(2x + 1)$;
- большая: $(2x)^2 - 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 - 2x + 1$.

Ответ: $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$.

Пример 4. Разложи на множители: $27 - y^3$.

Решение. $27 = 3^3$, $a = 3$, $b = y$. Разность кубов:

- $(3 - y)$;
- $3^2 + 3 \cdot y + y^2 = 9 + 3y + y^2$.

Ответ: $(3 - y)(9 + 3y + y^2)$.

Пример 5. Разложи на множители: $64a^3 - 125b^3$.

Решение. $64a^3 = (4a)^3$, $125b^3 = (5b)^3$. $a = 4a$, $b = 5b$. Разность кубов:

- $(4a - 5b)$;
- $(4a)^2 + 4a \cdot 5b + (5b)^2 = 16a^2 + 20ab + 25b^2$.

Ответ: $(4a - 5b)(16a^2 + 20ab + 25b^2)$.

Пример 6. Проверь раскрытием, что $(a - 1)(a^2 + a + 1) = a^3 - 1$.

Решение. Перемножаем «каждый с каждым»: $a \cdot a^2 + a \cdot a + a \cdot 1 - 1 \cdot a^2 - 1 \cdot a - 1 \cdot 1 = a^3 + a^2 + a - a^2 - a - 1$. Сокращаются $+a^2$ и $-a^2$, а также $+a$ и $-a$. Остаётся $a^3 - 1$.

Ответ: верно, $a^3 - 1$.



Запомни главное

- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ — сумма кубов.
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ — разность кубов.
- Большая скобка — **неполный квадрат** (с ab , а НЕ $2ab$).
- Знаки чередуются: в первой скобке как в выражении, средний член большой скобки — наоборот.
- Последний член большой скобки (b^2) всегда со знаком плюс.



Домашнее задание

1. Разложи на множители: $x^3 + 1$.
2. Разложи на множители: $a^3 - 8$.
3. Разложи на множители: $y^3 + 64$.
4. Разложи на множители: $27x^3 - 1$.
5. Разложи на множители: $8 + b^3$.
6. Разложи на множители: $125a^3 - 27$.
7. Найди ошибку: $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 4x + 4)$. Исправь.
8. Проверь раскрытием, что $(a + 1)(a^2 - a + 1) = a^3 + 1$.
9. ★ Разложи на множители: $x^6 - 1$ (подсказка: это $(x^3)^2 - 1$, разность квадратов, а дальше — кубы).