

# Урок 33. Линейное уравнение с двумя переменными

Алгебра, 7 класс · §15 · ~45 минут

## Что ты узнаешь


- Как выглядит линейное уравнение с двумя переменными  $ax + by = c$
- Что такое решение такого уравнения (это не одно число, а целая пара!)
- Почему у такого уравнения бесконечно много решений
- Что график линейного уравнения с двумя переменными — это прямая
- Как построить эту прямую быстро и без ошибок

## Разбираемся в теме

Раньше уравнения у тебя были скромные:  $x - 5 = 0$ , и ответ один —  $x = 5$ . Одна переменная, один корень. Чисто, аккуратно.

А теперь представь, что тебе говорят: «У меня в кошельке несколько двухрублёвых и пятирублёвых монет, всего на 20 рублей. Сколько каких?» Сразу пишем:  $2x + 5y = 20$ , где  $x$  — число двухрублёвых,  $y$  — число пятирублёвых.


И вот загвоздка: ответов-то много! Можно взять 5 двушек и 2 пятёрки ( $2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 20$ ). А можно 0 двушек и 4 пятёрки ( $2 \cdot 0 + 5 \cdot 4 = 20$ ). Оба варианта подходят. Вот что значит **уравнение с двумя переменными**.

 **Правило:** Линейное уравнение с двумя переменными — это уравнение вида  $ax + by = c$ , где  $a, b, c$  — числа, причём  $a$  и  $b$  не равны нулю одновременно.

Например:  $2x + 5y = 20$ , или  $x - y = 3$ , или  $7x + y = 0$ . Главное — переменные стоят в первой степени (никаких  $x^2$ , никаких  $x \cdot y$ ), отсюда и слово «линейное».


## Что такое решение


Раз переменных две, то и ответ должен задавать обе сразу. Поэтому решение — это **пара чисел**.

 **Правило:** Решение уравнения с двумя переменными — это пара значений  $(x; y)$ , которая обращает уравнение в верное равенство.

Пишут решение всегда в скобках, через точку с запятой, и **сначала x, потом y**:  $(5; 2)$ . Это священный порядок, как имя и фамилия.

Проверим пару  $(5; 2)$  для уравнения  $2x + 5y = 20$ : подставляем  $x = 5, y = 2 \rightarrow 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 10 + 10 = 20$ . Верно! Значит,  $(5; 2)$  — решение.

 **Частая ошибка:** Путать порядок и записать  $(2; 5)$  вместо  $(5; 2)$ . Проверим:  $2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 4 + 25 = 29 \neq 20$ . Уже не решение! Порядок важен.

 **Попробуй сам:** Является ли пара  $(0; 4)$  решением уравнения  $2x + 5y = 20$ ? Подставь и проверь.


## Решений бесконечно много

Чтобы найти решения, удобно одну переменную выразить через другую. Возьмём  $x - y = 3$  и выразим  $y$ :  $y = x - 3$ .

Теперь подставляем любое  $x$ , какое захотим, и получаем  $y$ :

$x$	0	1	2	3	5
$y$	-3	-2	-1	0	2


Каждый столбик — это готовая пара-решение:  $(0; -3), (1; -2), (2; -1), (3; 0), (5; 2)$ . И так можно продолжать вечно. **Решений бесконечно много.**

 **Лайфхак:** Чтобы найти решение, подставь любое удобное число вместо одной переменной и вычисли вторую. Бери такие  $x$ , чтобы  $y$  получался

«красивым» (целым).

### График — это прямая

А теперь самое красивое. Давай отметим все эти пары точками на координатной плоскости.  $(0; -3)$ ,  $(1; -2)$ ,  $(2; -1)$ ,  $(3; 0)$ ... И окажется, что все они лежат на **одной прямой линии!**

 **Правило:** График линейного уравнения с двумя переменными — это **прямая**. Каждая точка прямой — это решение уравнения, и наоборот.

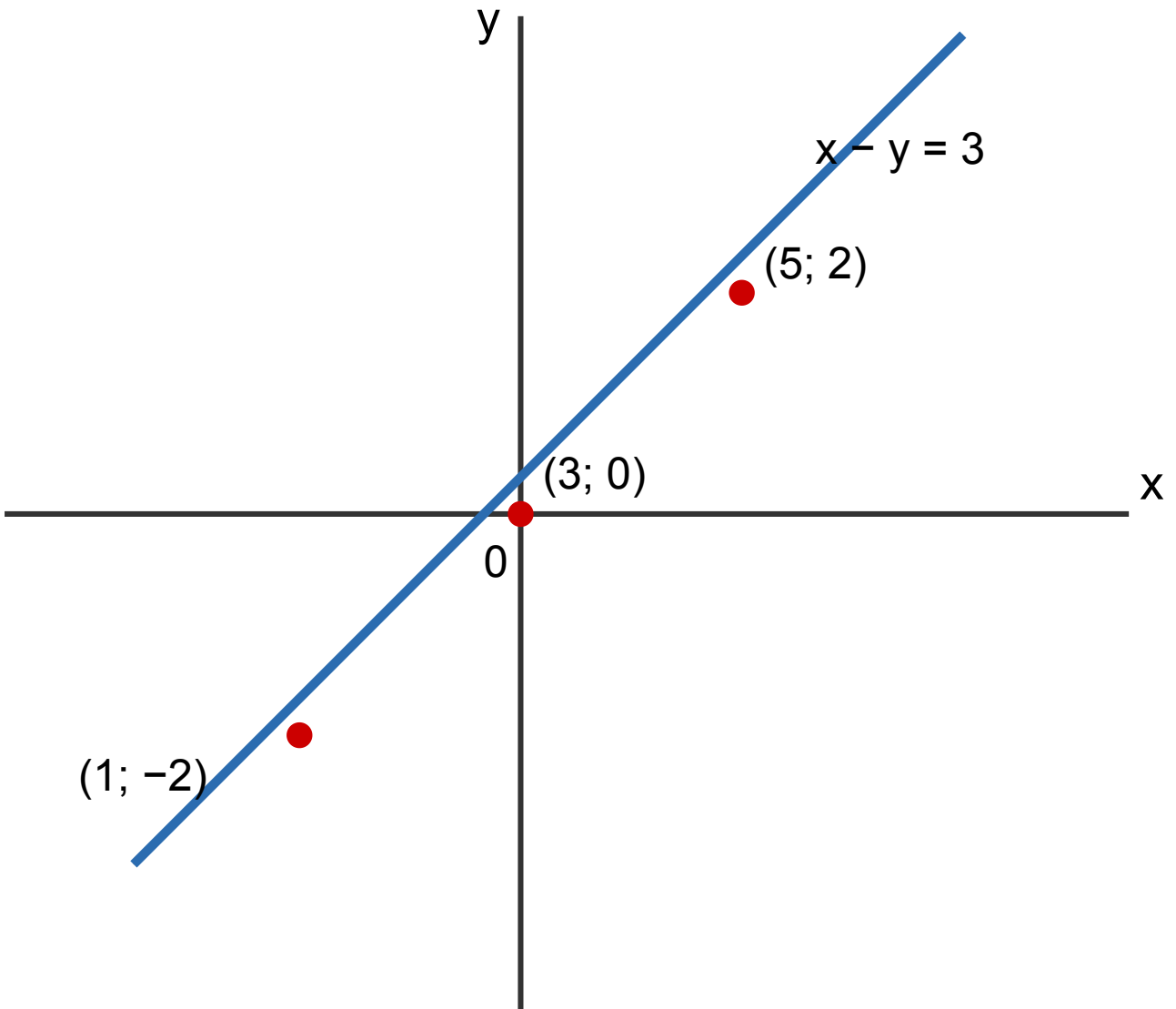



Рис. 1. График уравнения  $x - y = 3$  — прямая. Любая её точка — решение

### Как построить прямую

Прямая определяется всего двумя точками (помнишь линейку — приложил к двум точкам и провёл). Значит, нам хватит **двух решений**.

 **Лайфхак:** Удобнее всего брать  $x = 0$  (тогда сразу видно, где прямая пересекает ось  $y$ ) и  $y = 0$  (где пересекает ось  $x$ ). Эти точки легко считать и легко ставить.

🤔 **А знаешь ли ты?** Идею задавать линии уравнениями придумал французский философ и математик Рене Декарт ещё в XVII веке. Поэтому координатную плоскость с осями  $x$  и  $y$  называют **декартовой**. Говорят, идея пришла ему, когда он лежал в постели и следил за мухой на потолке: как описать её положение числами?

## Разбор примеров

**Пример 1.** Является ли пара  $(2; 3)$  решением уравнения  $4x - y = 5$ ?

*Решение.* Подставляем  $x = 2$ ,  $y = 3$ :  $4 \cdot 2 - 3 = 8 - 3 = 5$ . Получили 5 — ровно то, что справа.

**Ответ:** да,  $(2; 3)$  — решение.

---

**Пример 2.** Является ли пара  $(1; 4)$  решением уравнения  $3x + 2y = 10$ ?

*Решение.* Подставляем  $x = 1$ ,  $y = 4$ :  $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11$ . А нужно 10.  $11 \neq 10$ .

**Ответ:** нет, не является решением.

---

**Пример 3.** Вырази  $y$  через  $x$  из уравнения  $2x + y = 7$  и найди три решения.

*Решение.* Переносим  $2x$  вправо:  $y = 7 - 2x$ .

- $x = 0 \rightarrow y = 7 - 0 = 7$ . Пара  $(0; 7)$ .
- $x = 1 \rightarrow y = 7 - 2 = 5$ . Пара  $(1; 5)$ .
- $x = 3 \rightarrow y = 7 - 6 = 1$ . Пара  $(3; 1)$ .

**Ответ:**  $y = 7 - 2x$ ; решения, например,  $(0; 7)$ ,  $(1; 5)$ ,  $(3; 1)$ .

---

**Пример 4.** Найди решение уравнения  $x + 3y = 12$ , у которого  $x = 0$ . А затем —  $y$  которого  $y = 0$ .

*Решение.* При  $x = 0$ :  $0 + 3y = 12$ , значит,  $3y = 12$ ,  $y = 4$ . Пара  $(0; 4)$ . При  $y = 0$ :  $x + 3 \cdot 0 = 12$ , значит,  $x = 12$ . Пара  $(12; 0)$ .

**Ответ:**  $(0; 4)$  и  $(12; 0)$ .

---

**Пример 5.** Построй график уравнения  $x + 2y = 4$ .

*Решение.* Найдём две точки. При  $x = 0$ :  $2y = 4$ ,  $y = 2 \rightarrow$  точка  $(0; 2)$ . При  $y = 0$ :  $x = 4 \rightarrow$  точка  $(4; 0)$ . Отмечаем обе точки и проводим через них прямую.

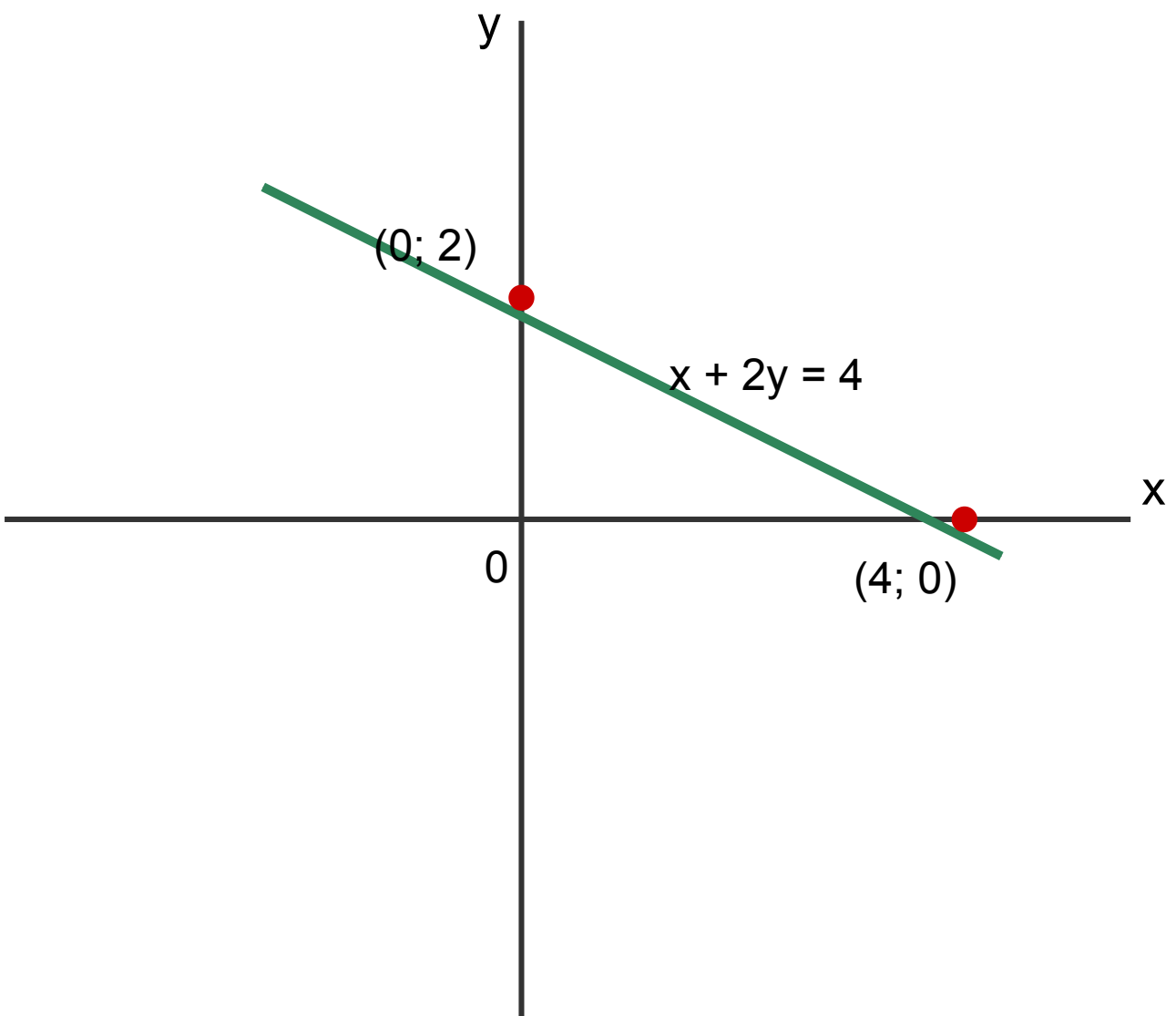


Рис. 2. График уравнения  $x + 2y = 4$  по двум точкам

**Ответ:** прямая через точки (0; 2) и (4; 0).

---

**Пример 6.** При каком значении  $a$  пара (3; -1) является решением уравнения  $ax + 2y = 4$ ?

*Решение.* Подставляем  $x = 3, y = -1$ :  $a \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 4$   $3a - 2 = 4$   $3a = 6$   $a = 2$ .

**Ответ:**  $a = 2$ .



### Запомни главное

- **Линейное уравнение с двумя переменными:**  $ax + by = c$  ( $a$  и  $b$  не нули сразу).
- **Решение** — это пара чисел ( $x; y$ ), порядок важен: сначала  $x$ , потом  $y$ .
- Чтобы проверить пару — **подставь** оба числа и посмотри, верное ли равенство.
- Решений **бесконечно много**.
- **График** уравнения — **прямая**. Достаточно двух точек, удобно брать  $x = 0$  и  $y = 0$ .



### Домашнее задание

1. Является ли пара (4; 1) решением уравнения  $2x - 3y = 5$ ?
2. Является ли пара (-2; 3) решением уравнения  $x + y = 1$ ?
3. Вырази  $y$  через  $x$  из уравнения  $5x + y = 8$ .
4. Вырази  $x$  через  $y$  из уравнения  $x - 4y = 10$ .
5. Найди три любых решения уравнения  $3x - y = 6$ .
6. Найди решение уравнения  $2x + 5y = 10$ , у которого  $x = 0$ , и решение, у которого  $y = 0$ .
7. Построй график уравнения  $x + y = 5$  (найди две точки).
8. При каком значении  $b$  пара (1; 2) является решением уравнения  $4x + by = 10$ ?

9. ★ Запиши какое-нибудь линейное уравнение с двумя переменными, решением которого является пара (3; 4). (Подсказка: придумай уравнение и проверь подстановкой; вариантов много.)