Урок 34. Системы линейных уравнений с двумя переменными

Алгебра, 7 класс · §15 · ~45 минут

🎯 Что ты узнаешь

- Что такое система уравнений и зачем нужна фигурная скобка
- Что значит «решить систему» и почему её решение — снова пара чисел
- Как решить систему графическим способом
- Сколько решений может быть у системы: одно, ни одного или бесконечно много
- Как по картинке (пересекаются, параллельны, совпадают) сразу сказать число решений

📖 Разбираемся в теме

В прошлом уроке мы выяснили неприятную вещь: у одного уравнения с двумя переменными решений **бесконечно много**. Это как если бы на вопрос «сколько мне лет?» отвечали «ну, от 5 до 100». Хочется точности!

И тут на помощь приходит второй закон, второе уравнение. Смотри.

Загадка: «Я задумал два числа. Их сумма равна 10. А их разность равна 4. Что за числа?»

Первое условие: $x + y = 10$. У него куча решений. Второе условие: $x - y = 4$. У него тоже куча. Но пара, которая подходит **сразу обоим** — единственная! Это и есть фокус.

Когда два уравнения должны выполняться **одновременно**, их объединяют фигурной скобкой и называют **системой**:

📌 **Правило:** Система уравнений — это два (или больше) уравнения, для которых ищут **общее** решение — такое, которое подходит **каждому** уравнению сразу.

Записывают так (фигурная скобка слева — знак «и то, и другое»):

{ x + y = 10 { x − y = 4

📌 **Правило:** Решить систему — значит найти все её решения. Решение системы — это пара (x; y), обращающая в верное равенство **оба** уравнения.

Графический способ

Каждое уравнение системы — это прямая (помнишь из прошлого урока?). Решение должно лежать **на обеих прямых сразу**. А где у двух прямых общая точка? В точке их **пересечения**!

💡 **Лайфхак:** Чтобы решить систему графически — построй обе прямые в одних осях и найди их точку пересечения. Её координаты (x; y) и есть решение.

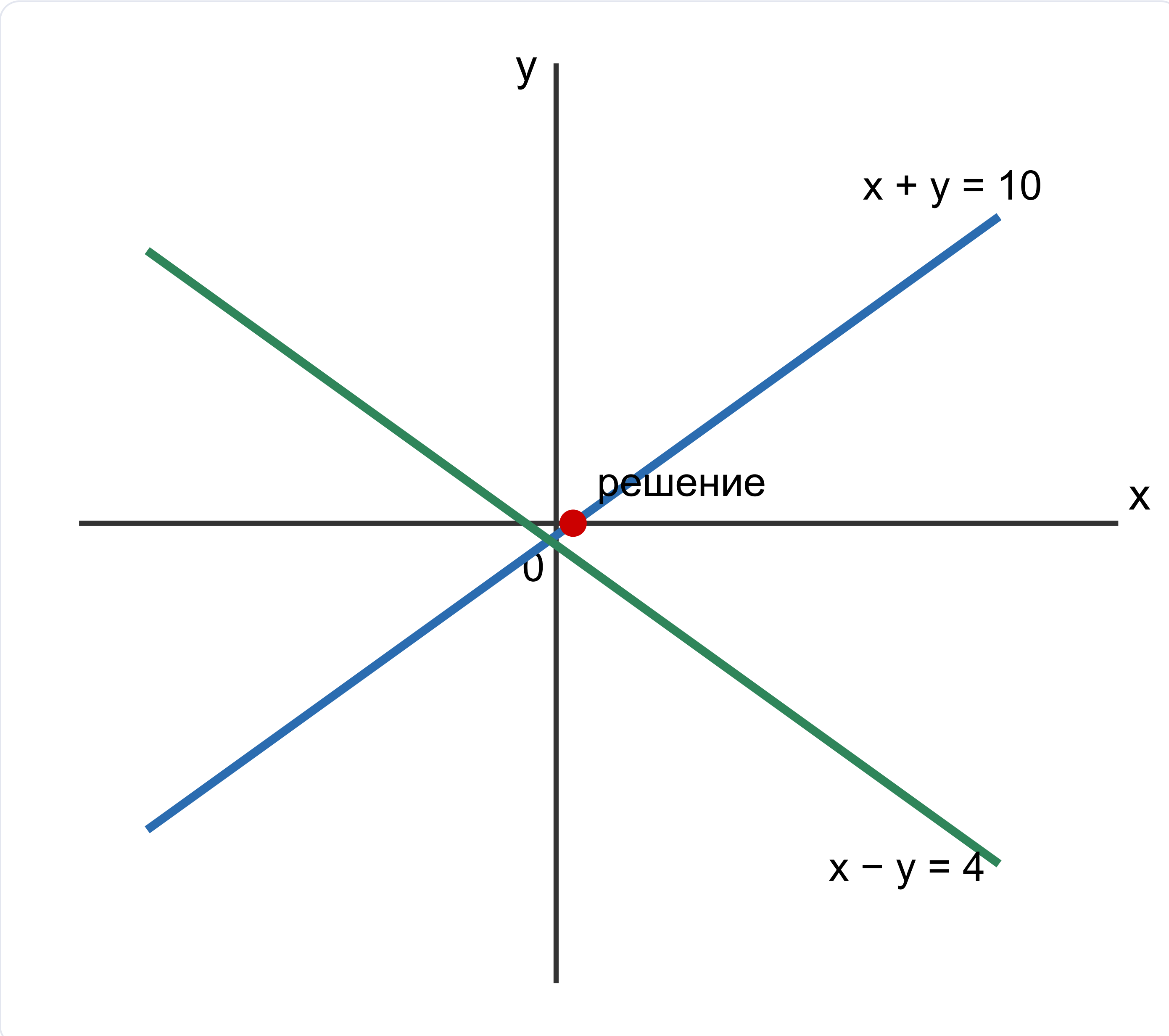

Рис. 1. Решение системы — точка пересечения двух прямых

⏱ **Попробуй сам:** Угадай ответ к загадке из начала урока. Какие два числа дают в сумме 10, а в разности 4? Потом проверим.

Сколько у системы решений?

А вот тут интересно. Две прямые на плоскости могут располагаться по-разному, и от этого зависит число решений системы.

Случай 1. Прямые пересекаются. Одна общая точка → система имеет **ровно одно решение**. Это самый частый случай.

Случай 2. Прямые параллельны. Они нигде не встречаются → общих точек нет → у системы **нет решений** вовсе.

Случай 3. Прямые совпадают. Это одна и та же прямая, нарисованная дважды → общих точек бесконечно много → у системы **бесконечно много решений**.

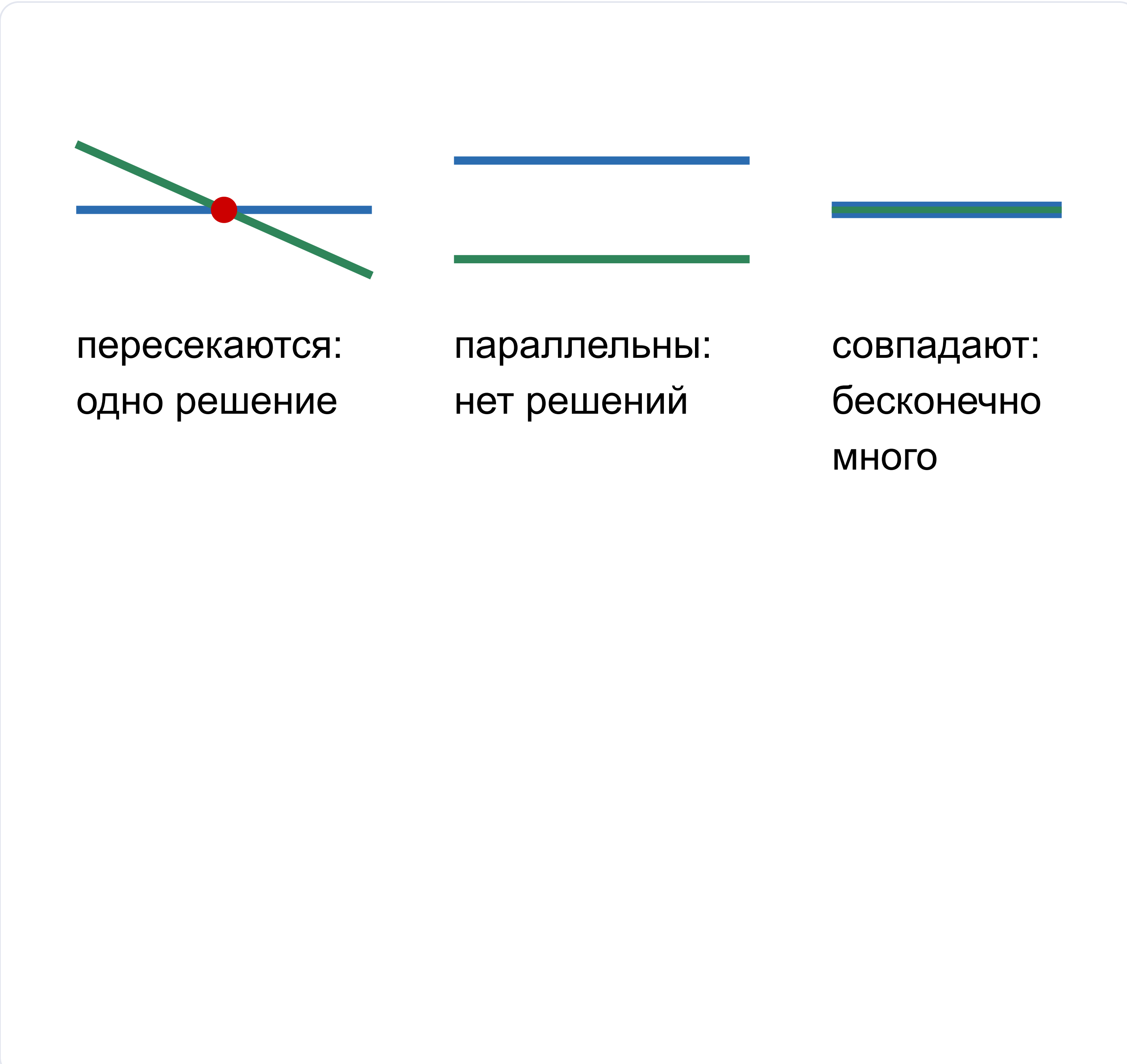

Рис. 2. Три случая взаимного расположения прямых

⚠️ **Частая ошибка:** Думать, что у системы всегда ровно одно решение. Нет! Бывает, что решений нет (параллельные прямые) или их бесконечно много (совпадающие).

💡 **Лайфхак:** Подсказку даёт **угловой коэффициент** (множитель при x, если выразить y). Если у прямых наклоны разные — пересекутся, решение одно. Если наклоны одинаковые, а свободные члены разные — параллельны, решений нет. Если совпадают и наклоны, и свободные члены — это одна прямая, решений бесконечно.

🤔 **А знаешь ли ты?** Системы линейных уравнений умели решать ещё в Древнем Китае более 2000 лет назад! В трактате «Математика в девяти книгах» описан способ с таблицами коэффициентов — по сути, прообраз того, что сегодня называют методом Гаусса.

Минус графического способа

Графический способ нагляден, но коварен: если решение — это, скажем, (2,3; 1,7), на клетчатой бумаге ты его точно не разглядишь. Поэтому в следующих уроках мы выучим **точные** способы — подстановки и сложения. А графику оставим для понимания и красоты.

✍️ Разбор примеров

Пример 1. Является ли пара (3; 1) решением системы?

{ x + y = 4 { 2x − y = 5

Решение. Проверяем оба уравнения с x = 3, y = 1. Первое: 3 + 1 = 4. Верно. Второе: 2·3 − 1 = 6 − 1 = 5. Верно. Подошло обоим уравнениям.

Ответ: да, (3; 1) — решение системы.

Пример 2. Является ли пара (2; 5) решением системы?

{ x + y = 7 { x − y = 1

Решение. Первое: $2 + 5 = 7$. Верно. Второе: $2 - 5 = -3$. А нужно 1. $-3 \neq 1$. Второму уравнению пара не подошла, значит, всей системе тоже.

Ответ: нет, не является решением.

Пример 3. Реши графически систему.

$\{ x + y = 10 \{ x - y = 4$

Решение. Строим обе прямые по двум точкам. Первая, $x + y = 10$: при $x = 0 \rightarrow (0; 10)$; при $y = 0 \rightarrow (10; 0)$. Вторая, $x - y = 4$: при $x = 0 \rightarrow (0; -4)$; при $y = 0 \rightarrow (4; 0)$. Прямые пересекаются в точке $(7; 3)$. **Проверка** (подставляем $(7; 3)$ в оба уравнения): $7 + 3 = 10$ — верно; $7 - 3 = 4$ — верно.

Ответ: $(7; 3)$. (Вот и разгадка загадки из начала урока: числа 7 и 3.)

Пример 4. Сколько решений у системы? Прямые задают наклоны.

$\{ y = 2x + 1 \{ y = 2x - 3$

Решение. Множитель при x у обеих прямых одинаковый — 2 (наклоны равны), а свободные члены разные (1 и -3). Значит, прямые **параллельны** и не пересекаются.

Ответ: решений нет.

Пример 5. Сколько решений у системы?

$\{ y = 3x - 2 \{ 2y = 6x - 4$

Решение. Разделим второе уравнение на 2: $y = 3x - 2$. Это в точности первое уравнение! Прямые **совпадают**.

Ответ: бесконечно много решений.

Пример 6. Реши графически систему и проверь ответ.

$\{ y = x + 1 \{ y = -x + 5$

Решение. Первая прямая: при $x = 0 \to (0; 1)$, при $x = 3 \to (3; 4)$. Вторая прямая: при $x = 0 \to (0; 5)$, при $x = 5 \to (5; 0)$. Пересекаются в точке (2; 3). **Проверка:** $y = x + 1 \to 3 = 2 + 1 = 3$, верно; $y = -x + 5 \to 3 = -2 + 5 = 3$, верно.

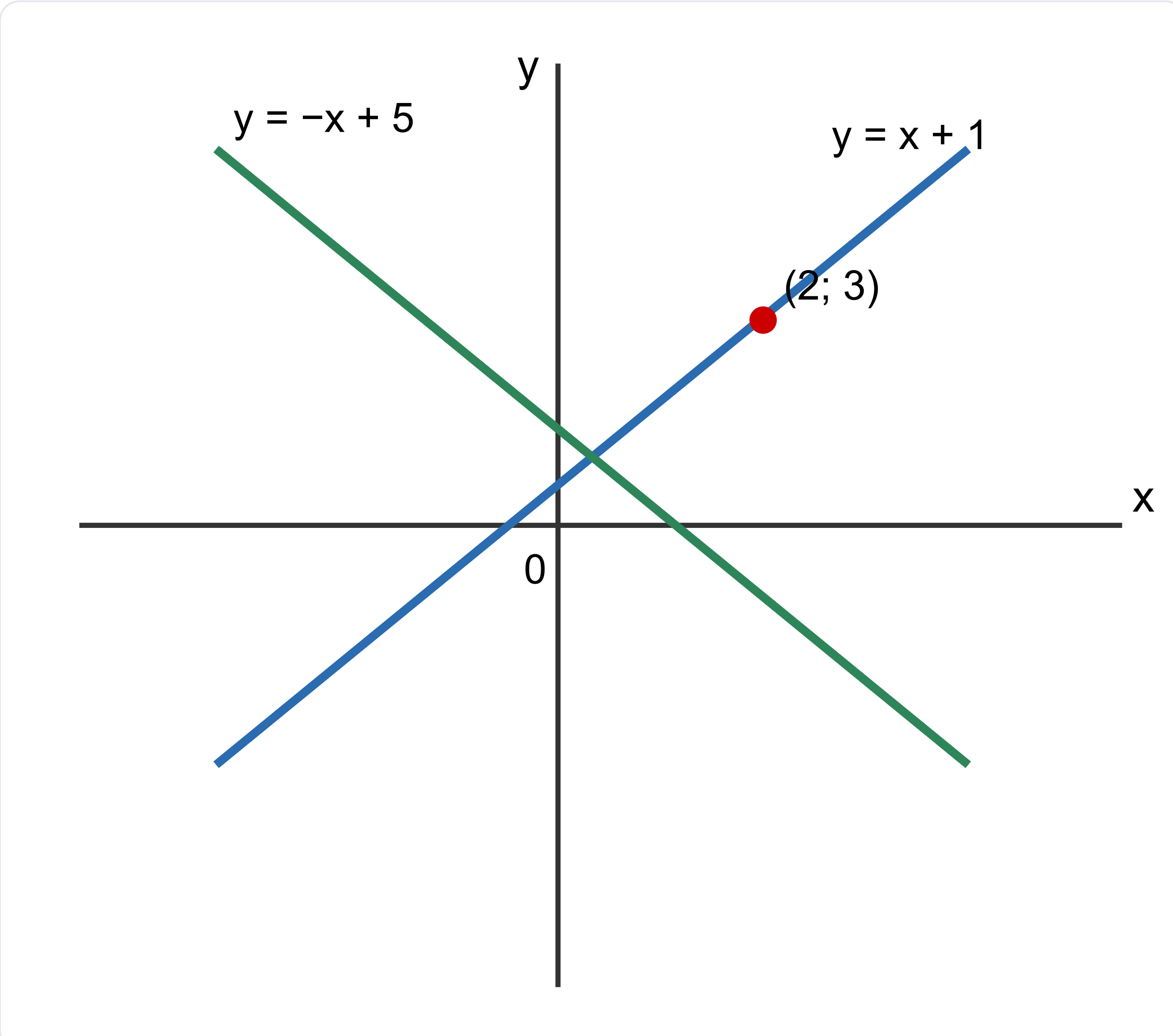

Рис. 3. Прямые пересекаются в точке (2; 3) — это решение

Ответ: (2; 3).

💡 **Запомни главное**

- **Система** — несколько уравнений под фигурной скобкой; нужно общее решение для **всех**.
- **Решение системы** — пара (x; y), верная для **каждого** уравнения. Всегда подставляй в **оба**!
- **Графический способ:** построй обе прямые, найди точку пересечения.
- **Число решений:** прямые пересекаются → **одно**; параллельны → **нет**; совпадают → **бесконечно много**.
- Графика наглядна, но неточна — для точных ответов нужны способы подстановки и сложения.

📝 Домашнее задание

1. Является ли пара (2; 3) решением системы { x + y = 5; { x − y = −1?
2. Является ли пара (4; 1) решением системы { 2x + y = 9; { x − y = 2?
3. Реши графически систему { x + y = 6; { x − y = 2 (построй прямые и найди точку пересечения).
4. Реши графически систему { y = x; { y = −x + 4.
5. Сколько решений у системы { y = 5x + 2; { y = 5x − 7? Объясни.
6. Сколько решений у системы { y = 4x − 1; { 3y = 12x − 3? Объясни.
7. Не строя графика, скажи, пересекаются ли прямые y = 2x + 3 и y = −x + 6 (сравни наклоны).
8. Придумай систему двух уравнений, у которой решением будет пара (1; 2). (Подсказка: возьми два разных уравнения, в которые (1; 2) подходит.)
9. ⭐ При каком значении k прямые y = kx + 1 и y = 3x − 2 будут параллельны (система не будет иметь решений)?