

Урок 35. Решение систем способом подстановки

Алгебра, 7 класс · §16 · ~45 минут


Что ты узнаешь

- Почему графического способа недостаточно и зачем нужен точный метод
- Что такое способ подстановки и почему он почти всегда работает
- Алгоритм подстановки по шагам — как по рецепту
- Как не запутаться и обязательно проверить ответ
- Что значат «нет решений» и «бесконечно много» на языке подстановки

Разбираемся в теме

На прошлом уроке мы решали системы графически. Способ красивый, но представь: ответ получился $(1,7; 2,4)$. На клетчатой бумаге ты такое не разглядишь — глаз не алмаз. Нужен **точный** способ, который даёт ответ числами, а не на глазок.

Знакомься — **способ подстановки**. Идея гениально простая: давай из одного уравнения выразим одну переменную через другую, а потом **подставим** это выражение во второе уравнение. И — фокус! — во втором уравнении останется только одна переменная. А одно уравнение с одной переменной решать ты уже умеешь!

 **Правило:** Способ подстановки — это сведение системы из двух уравнений с двумя переменными к одному уравнению с одной переменной.

Разберём на примере

Решим систему:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$


Смотри, как удобно: в первом уравнении y **уже выражен** через x . Это $y = 2x - 1$. Так давай вместо y во втором уравнении напишем $(2x - 1)$:

$$3x + (2x - 1) = 9$$

Видишь? Игреков больше нет, только иксы! Решаем: $3x + 2x - 1 = 9$ $5x - 1 = 9$ $5x = 10$ $x = 2$.

Нашли $x = 2$. Теперь возвращаемся к выражению $y = 2x - 1$ и подставляем $x = 2$: $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.


Готово: $x = 2$, $y = 3$, то есть пара $(2; 3)$.

 **Лайфхак:** Нашёл x — сразу подставляй его в самое простое уравнение (обычно в то, где переменная уже выражена). Так быстрее и меньше шансов ошибиться.

Алгоритм способа подстановки

Правило (алгоритм):

1. Выразить из любого уравнения одну переменную через другую (выбирай ту, что выражается легче — например, с коэффициентом 1).
2. Подставить это выражение в **другое** уравнение. Получится уравнение с одной переменной.
3. Решить его — найти первую переменную.
4. Подставить найденное число в выражение из шага 1 — найти вторую переменную.
5. Записать ответ парой $(x; y)$ и **проверить** подстановкой в оба уравнения.

 **Лайфхак:** На шаге 1 ищи переменную, перед которой стоит коэффициент 1 или -1 — её выразить проще всего, не появятся дроби. Например, в уравнении $x + 3y = 7$ удобно выразить $x = 7 - 3y$.

⚠️ **Частая ошибка:** Подставлять выражение обратно в то же самое уравнение, из которого его взяли. Так ты получишь бессмыслицу вроде $9 = 9$. Подставлять надо во **второе** уравнение!

🕒 **Попробуй сам:** В системе $\{ x = y + 2; \{ 2x + y = 10$ какая переменная уже выражена? Подставь её во второе уравнение и попробуй найти y .

А если не выражено заранее?

Часто система выглядит «обычно», и ничего не выражено:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

Не беда — выразим сами. Из первого уравнения легко достать y : $y = 5 - x$. И дальше по алгоритму.

🤔 **А знаешь ли ты?** Само слово «алгоритм» произошло от имени средневекового учёного аль-Хорезми, жившего в IX веке в Багдаде. Он написал книгу о правилах вычислений, и латинизированное звучание его имени — *Algorithmi* — стало означать «чёткий пошаговый рецепт». А ещё от названия его книги «аль-джабр» пошло слово «алгебра»!

Особые случаи

Что если при подстановке переменные **сократятся обе**?

- Получилось что-то всегда верное, вроде $0 = 0 \rightarrow$ прямые совпадают \rightarrow **бесконечно много решений**.
- Получилось что-то неверное, вроде $0 = 5 \rightarrow$ прямые параллельны \rightarrow **решений нет**.

📝 Разбор примеров

Пример 1. Реши систему способом подстановки.

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Решение. y уже выражен: $y = 3x - 4$. Подставляем во второе уравнение: $x + (3x - 4) = 8$ $4x - 4 = 8$ $4x = 12$ $x = 3$. Теперь $y = 3 \cdot 3 - 4 = 5$. **Проверка:** $y = 3x - 4 \rightarrow 5 = 9 - 4 = 5 \checkmark$; $x + y = 8 \rightarrow 3 + 5 = 8 \checkmark$.

Ответ: (3; 5).

Пример 2. Реши систему.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Решение. Выразим y из первого: $y = 7 - x$. Подставим во второе: $2x - (7 - x) = 5$ $2x - 7 + x = 5$ $3x - 7 = 5$ $3x = 12$ $x = 4$. Тогда $y = 7 - 4 = 3$. **Проверка:** $4 + 3 = 7 \checkmark$; $2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5 \checkmark$.

Ответ: (4; 3).

Пример 3. Реши систему.

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

Решение. Удобнее выразить y из первого (там коэффициент 1): $y = 1 - 3x$. Подставим во второе: $5x + 2(1 - 3x) = 4$ $5x + 2 - 6x = 4$ $-x + 2 = 4$ $-x = 2$ $x = -2$. Тогда $y = 1 - 3 \cdot (-2) = 1 + 6 = 7$. **Проверка:** $3 \cdot (-2) + 7 = -6 + 7 = 1 \checkmark$; $5 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 = -10 + 14 = 4 \checkmark$.

Ответ: (-2; 7).

Пример 4. Реши систему.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$$

Решение. Выразим x из первого: $x = 1 + 2y$. Подставим во второе: $3(1 + 2y) + 4y = 13$ $3 + 6y + 4y = 13$ $3 + 10y = 13$ $10y = 10$ $y = 1$. Тогда $x = 1 + 2 \cdot 1 = 3$. **Проверка:** $3 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1 \checkmark$; $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 9 + 4 = 13 \checkmark$.

Ответ: (3; 1).

Пример 5. Реши систему (особый случай).

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$$

Решение. $y = 2x + 3$, подставляем во второе: $4x - 2(2x + 3) = 1$ $4x - 4x - 6 = 1 - 6 =$
1. Получили неверное равенство! Иксы сократились, осталась неправда.

Ответ: решений нет (прямые параллельны).

Пример 6. Реши систему.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x = 6 - 3y \end{cases}$$

Решение. x уже выражен: $x = 6 - 3y$. Подставим в первое: $2(6 - 3y) + 3y = 12$ $12 -$
 $6y + 3y = 12$ $12 - 3y = 12$ $-3y = 0$ $y = 0$. Тогда $x = 6 - 3 \cdot 0 = 6$. **Проверка:** $2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 =$
 12 ✓; $6 = 6 - 0$ ✓.

Ответ: (6; 0).



Запомни главное

- **Способ подстановки:** выразить одну переменную \rightarrow подставить в другое уравнение \rightarrow получить уравнение с одной переменной.
- Выражай ту переменную, у которой коэффициент **1** или **-1** — будет проще.
- Подставляй выражение только во **второе** уравнение (не в то, откуда взял).
- Нашёл одну переменную — подставь её обратно и найди вторую.
- Всегда **проверяй** ответ в **обоих** уравнениях.
- $0 = 0 \rightarrow$ решений бесконечно; неверное равенство ($0 = 5$) \rightarrow решений нет.



Домашнее задание

1. Реши способом подстановки: $\begin{cases} y = x + 2 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$.
2. Реши: $\begin{cases} x = 2y - 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$.
3. Реши: $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$.
4. Реши: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$.

5. Реши: $\{ x - 3y = 2; \{ 2x + y = 11.$

6. Реши: $\{ 4x + y = 9; \{ 2x + 3y = 7.$

7. Реши и определи, сколько решений: $\{ y = 3x - 1; \{ 6x - 2y = 2.$

8. Реши: $\{ 5x - 2y = 4; \{ x + 2y = 8.$

9. ★ Реши систему: $\{ (x + y)/2 = 4; \{ x - y = 2.$ (Подсказка: сначала умножь первое уравнение на 2.)