

Урок 36. Решение систем способом сложения

Алгебра, 7 класс · §16 · ~45 минут

Что ты узнаешь

- Что такое способ сложения (его ещё зовут способом алгебраического сложения)
- Как «убить» одну переменную, сложив или вычтя уравнения
- Как уравнивать коэффициенты, домножив уравнения на числа
- Алгоритм способа сложения по шагам
- Когда удобнее сложение, а когда подстановка

Разбираемся в теме

Способ подстановки хорош, но иногда выражать переменную неудобно — появляются дроби, всё громоздко. Есть другой приём, часто куда более изящный — **способ сложения**.

Идея такая: что, если сложить два уравнения системы почленно — левую часть с левой, правую с правой? Если повезёт, одна из переменных при сложении **исчезнет** (взаимно уничтожится). И снова останется одно уравнение с одной переменной!

Когда складывать сразу


Посмотри на эту систему:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Заметил? В первом уравнении $+y$, во втором $-y$. Если их сложить, игрехи уничтожатся: $+y + (-y) = 0$!

Складываем почленно: $(x + y) + (x - y) = 9 + 3$ $x + y + x - y = 12$ $2x = 12$ $x = 6$.

Игрек испарился, осталось $2x = 12$. Находим $x = 6$, а потом подставляем в любое уравнение: $6 + y = 9 \rightarrow y = 3$.


 **Правило:** Если у одной и той же переменной в уравнениях **противоположные** коэффициенты (например, $+y$ и $-y$), уравнения **складывают** — и эта переменная исчезает.


Когда вычитать

А если коэффициенты не противоположные, а **одинаковые**? Например:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

Здесь у x в обоих уравнениях $+3$. Складывать бесполезно (получим $6x - x$ не уйдёт). А вот если **вычесть** одно из другого, тройки-иксы уничтожатся: $(3x + 2y) - (3x - y) = 16 - 7$ $3x + 2y - 3x + y = 9$ $3y = 9$ $y = 3$.

 **Правило:** Если у переменной **одинаковые** коэффициенты, уравнения **вычитают** одно из другого — и эта переменная исчезает.

 **Частая ошибка:** При вычитании забыть поменять знаки у **всех** слагаемых второго уравнения. Минус перед скобкой меняет знак КАЖДОГО члена: $-(3x - y) = -3x + y$.

Главный приём: уравнивать коэффициенты

Чаще всего коэффициенты не равны и не противоположны — сами по себе ничего не уничтожается. Тогда мы их **уравниваем**: домножаем уравнения на подходящие числа.

Помни правило: уравнение можно умножить целиком на любое число (не ноль) — обе части. Равенство останется верным.

Возьмём систему:


$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

Хотим убрать y . У него коэффициенты 3 и -1 . Чтобы они стали противоположными, домножим **второе** уравнение на 3 : $3x - y = 3 \mid \cdot 3 \rightarrow 9x - 3y = 9$.

Теперь система: $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 9x - 3y = 9 \end{cases}$

Коэффициенты у y теперь $+3$ и -3 — противоположные! Складываем: $11x = 22 \quad x = 2$.


Подставим в $3x - y = 3$: $6 - y = 3 \rightarrow y = 3$.


 **Лайфхак:** Чтобы быстро уравнивать коэффициенты, найди для них общее кратное. Для 2 и 3 это 6 : первое умножь на 3 , второе на 2 . А если один коэффициент делится на другой (как 3 и 6), достаточно домножить только одно уравнение.

Алгоритм способа сложения

Правило (алгоритм):

1. Выбрать переменную, которую будем убирать.
2. Домножить одно или оба уравнения так, чтобы коэффициенты у этой переменной стали одинаковыми или противоположными.
3. Сложить (если противоположные) или вычесть (если одинаковые) уравнения — переменная исчезнет.
4. Решить полученное уравнение с одной переменной.
5. Подставить найденное число в любое исходное уравнение — найти вторую переменную.
6. Записать ответ парой $(x; y)$ и проверить в обоих уравнениях.

 **Попробуй сам:** В системе $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$ у x одинаковые коэффициенты. Что сделать — сложить или вычесть? Попробуй довести до ответа.

 **А знаешь ли ты?** Способ сложения лежит в основе метода, которым компьютеры решают системы из сотен и тысяч уравнений — например, при

расчёте прочности мостов или прогнозе погоды. Этот метод носит имя великого Карла Гаусса, хотя похожие идеи, как мы видели, знали ещё в Древнем Китае.

Разбор примеров

Пример 1. Реши способом сложения.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Решение. У y коэффициенты $+1$ и -1 (противоположные) — складываем: $2x = 14 \rightarrow x = 7$. Подставим в $x + y = 10$: $7 + y = 10 \rightarrow y = 3$. **Проверка:** $7 + 3 = 10 \checkmark$; $7 - 3 = 4 \checkmark$.

Ответ: (7; 3).

Пример 2. Реши способом сложения.

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

Решение. У y коэффициенты $+1$ и -1 — складываем: $5x = 20 \rightarrow x = 4$. Подставим в $2x + y = 11$: $8 + y = 11 \rightarrow y = 3$. **Проверка:** $2 \cdot 4 + 3 = 11 \checkmark$; $3 \cdot 4 - 3 = 12 - 3 = 9 \checkmark$.

Ответ: (4; 3).

Пример 3. Реши способом сложения (с вычитанием).

$$\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Решение. У y одинаковые коэффициенты ($+2$ и $+2$) — вычитаем из первого второе: $(5x + 2y) - (3x + 2y) = 16 - 12$ $2x = 4 \rightarrow x = 2$. Подставим в $3x + 2y = 12$: $6 + 2y = 12 \rightarrow 2y = 6 \rightarrow y = 3$. **Проверка:** $5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16 \checkmark$; $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 6 + 6 = 12 \checkmark$.

Ответ: (2; 3).

Пример 4. Реши способом сложения (уравниваем коэффициенты).

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

Решение. Уберём y . Домножим второе уравнение на 3: $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 9x - 3y = 9 \end{cases}$

Складываем: $11x = 22 \rightarrow x = 2$. Подставим в $3x - y = 3$: $6 - y = 3 \rightarrow y = 3$.

Проверка: $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4 + 9 = 13 \checkmark$; $3 \cdot 2 - 3 = 3 \checkmark$.

Ответ: (2; 3).

Пример 5. Реши способом сложения (домножаем оба уравнения).

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

Решение. Уберём x . Общее кратное 3 и 2 — это 6. Первое умножим на 2, второе на 3: $\begin{cases} 6x + 8y = 22 \\ 6x + 9y = 24 \end{cases}$ У x одинаковые коэффициенты (+6) — вычитаем из второго первое: $(6x + 9y) - (6x + 8y) = 24 - 22 \rightarrow y = 2$. Подставим в $2x + 3y = 8$: $2x + 6 = 8 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$. **Проверка:** $3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 3 + 8 = 11 \checkmark$; $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8 \checkmark$.

Ответ: (1; 2).

Пример 6. Реши способом сложения.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$$

Решение. У y коэффициенты -3 и $+3$ (противоположные) — складываем: $6x = 12 \rightarrow x = 2$. Подставим в $2x + 3y = 11$: $4 + 3y = 11 \rightarrow 3y = 7 \rightarrow y = 7/3$. Хм, дробь.

Перепроверим первое: $4 \cdot 2 - 3y = 1 \rightarrow 8 - 3y = 1 \rightarrow 3y = 7 \rightarrow y = 7/3$. То же самое.

Проверка: $4 \cdot 2 - 3 \cdot (7/3) = 8 - 7 = 1 \checkmark$; $2 \cdot 2 + 3 \cdot (7/3) = 4 + 7 = 11 \checkmark$.

Ответ: (2; 7/3). (Дробный ответ — тоже нормальный ответ; главное, что он проходит проверку.)



Запомни главное

- **Способ сложения:** уравнивать коэффициенты у одной переменной, потом сложить или вычесть уравнения, чтобы она исчезла.

- Коэффициенты **противоположные** (+y, -y) → **складываем**.
- Коэффициенты **одинаковые** (+2y, +2y) → **вычитаем**.
- Не равны и не противоположны → **домножаем** уравнения на числа (через общее кратное).
- При вычитании меняй знак у **каждого** члена второго уравнения.
- Нашёл одну переменную — подставь и найди вторую. **Проверь** в обоих уравнениях.



Домашнее задание

1. Реши способом сложения: $\{ x + y = 8; \{ x - y = 2.$
2. Реши: $\{ 3x + y = 14; \{ 2x - y = 1.$
3. Реши (вычитанием): $\{ 4x + 3y = 10; \{ 4x - y = 2.$
4. Реши: $\{ 2x + 5y = 16; \{ 2x + 3y = 12.$
5. Реши (уравняй коэффициенты): $\{ x + 2y = 8; \{ 3x - y = 3.$
6. Реши: $\{ 3x - 2y = 5; \{ 2x + 5y = 16.$
7. Реши: $\{ 5x + 2y = 1; \{ 3x - 4y = 11.$
8. Реши: $\{ 4x + 3y = 10; \{ 6x - 5y = -4.$
9. ★ Реши систему: $\{ 7x + 3y = 27; \{ 5x - 2y = 11.$ (Подсказка: чтобы убрать y, домножь первое на 2, второе на 3.)