

# Урок 37. Решение задач с помощью систем уравнений

Алгебра, 7 класс · §16 · ~45 минут

## Что ты узнаешь

- Зачем для задачи вводить сразу **две** переменные
- Как из условия задачи вытащить **два** уравнения и собрать систему
- Как решать задачи на движение, на смеси и цифры, на работу
- Почему ответ задачи нужно проверять не только подстановкой, но и здравым смыслом

## Разбираемся в теме


Раньше в текстовых задачах ты вводил одну переменную  $x$  и мучительно выражал через неё всё остальное. Иногда получалось так накручено, что сам забывал, что обозначил.


Теперь у тебя новое супероружие — **две переменные сразу**. Не нужно ничего хитро выражать: есть два неизвестных — назови их  $x$  и  $y$ , и пусть каждое условие задачи превратится в своё уравнение. Два условия — две строчки системы. Красота и порядок!

### Правило (как решать задачу системой):

1. Обозначить два неизвестных буквами  $x$  и  $y$  (обязательно записать, что есть что!).
2. Перевести условия задачи на язык уравнений — получить два уравнения.
3. Собрать систему и решить (подстановкой или сложением).

4. Вернуться к вопросу задачи и записать ответ словами. Проверить по смыслу.


 **Лайфхак:** Самый важный шаг — первый. Чётко запиши: «Пусть  $x$  — ...,  $y$  — ...». Половина ошибок в задачах оттого, что человек забыл, что обозначил буквой.

 **Попробуй сам:** «В классе 30 человек, девочек на 4 больше, чем мальчиков». Обозначь мальчиков  $x$ , девочек  $y$  и запиши два уравнения. (Подсказка: одно про сумму, другое про разность.)

### Тип 1. Задачи на «сумму и разность» и на цифры

Самый простой тип. «Двух чисел сумма такая, разность сякая» — прямо просится система. Сюда же примыкают задачи про **двузначные числа**.

Тут полезно вспомнить хитрость: двузначное число с цифрой десятков  $a$  и цифрой единиц  $b$  равно  **$10a + b$**  ( $a$  не  $a + b$ !). Например, число 53 — это  $10 \cdot 5 + 3$ .

 **Частая ошибка:** В задачах про цифры писать число как « $ab$ » =  $a \cdot b$  или  $a + b$ . Нет! Двузначное число =  $10 \cdot (\text{десятки}) + (\text{единицы})$ .

### Тип 2. Задачи на движение

Главная формула здесь: **путь = скорость · время**, то есть  $s = v \cdot t$ .

В задачах часто две лодки, два пешехода, лодка по течению и против. И тут спасает приём:

- по течению лодка плывёт со скоростью (собственная + течение):  $v + u$ ;
- против течения — (собственная – течение):  $v - u$ .

Обозначаем  $v$  и  $u$  двумя переменными — и составляем два уравнения по двум поездкам.

### Тип 3. Задачи на смеси, сплавы, проценты

«Смешали столько-то одного и столько-то другого». Тут два уравнения обычно такие: одно про **общее количество** (массу, объём), другое — про **содержимое** (количество соли, чистого металла, денег).

### Тип 4. Задачи на работу и на покупки

«Купили  $x$  булочек и  $y$  пирожков». Одно уравнение — про количество, второе — про общую стоимость. Очень похоже на задачи про смеси.



**А знаешь ли ты?** Текстовые задачи, которые решаются системами, встречаются в самых древних математических текстах. На вавилонских глиняных табличках возрастом около 4000 лет уже есть задачки вроде «длина и ширина поля...». Так что ты сейчас занимаешься делом, которому несколько тысячелетий!



### Разбор примеров

**Пример 1.** Сумма двух чисел равна 25, а их разность равна 7. Найди числа.

*Решение.* Пусть  $x$  — большее число,  $y$  — меньшее. Сумма:  $x + y = 25$ . Разность:  $x - y = 7$ .  $\begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 7 \end{cases}$  Сложим:  $2x = 32 \rightarrow x = 16$ . Тогда  $16 + y = 25 \rightarrow y = 9$ .

**Проверка:**  $16 + 9 = 25 \checkmark$ ;  $16 - 9 = 7 \checkmark$ .

**Ответ:** числа 16 и 9.

**Пример 2.** За 3 тетради и 2 ручки заплатили 130 рублей, а за 1 тетрадь и 4 ручки — 110 рублей. Сколько стоит тетрадь и сколько ручка?

*Решение.* Пусть  $x$  — цена тетради,  $y$  — цена ручки (в рублях).  $\begin{cases} 3x + 2y = 130 \\ x + 4y = 110 \end{cases}$  Выразим  $x$  из второго:  $x = 110 - 4y$ . Подставим в первое:  $3(110 - 4y) + 2y = 130$   $330 - 12y + 2y = 130$   $330 - 10y = 130$   $-10y = -200$   $y = 20$ . Тогда  $x = 110 - 4 \cdot 20 = 30$ . **Проверка:**  $3 \cdot 30 + 2 \cdot 20 = 90 + 40 = 130 \checkmark$ ;  $30 + 4 \cdot 20 = 30 + 80 = 110 \checkmark$ .

**Ответ:** тетрадь 30 рублей, ручка 20 рублей.

---

**Пример 3.** Двузначное число. Сумма его цифр равна 11. Если поменять цифры местами, число увеличится на 27. Найди число.

*Решение.* Пусть  $x$  — цифра десятков,  $y$  — цифра единиц. Тогда само число равно  $10x + y$ , а «перевёрнутое» —  $10y + x$ . Сумма цифр:  $x + y = 11$ . Перевёрнутое больше на 27:  $(10y + x) - (10x + y) = 27 \rightarrow 9y - 9x = 27 \rightarrow y - x = 3$ .  $\begin{cases} x + y = 11 \\ y - x = 3 \end{cases}$  Сложим:  $2y = 14 \rightarrow y = 7$ . Тогда  $x = 11 - 7 = 4$ . Число:  $10 \cdot 4 + 7 = 47$ .

**Проверка:** сумма цифр  $4 + 7 = 11 \checkmark$ ; перевёрнутое 74, и  $74 - 47 = 27 \checkmark$ .

**Ответ:** число 47.

---

**Пример 4.** Лодка по течению реки за 1 час проходит 18 км, а против течения за 1 час — 12 км. Найди собственную скорость лодки и скорость течения.

*Решение.* Пусть  $v$  — собственная скорость лодки,  $u$  — скорость течения (км/ч).

По течению:  $v + u = 18$ . Против течения:  $v - u = 12$ .  $\begin{cases} v + u = 18 \\ v - u = 12 \end{cases}$

Сложим:  $2v = 30 \rightarrow v = 15$ . Тогда  $15 + u = 18 \rightarrow u = 3$ . **Проверка:**  $15 + 3 = 18 \checkmark$ ;  $15 - 3 = 12 \checkmark$ . По смыслу всё разумно (течение медленнее лодки).

**Ответ:** собственная скорость 15 км/ч, скорость течения 3 км/ч.

---

**Пример 5.** В двух ящиках вместе 50 кг яблок. Если из первого переложить во второй 5 кг, в ящиках станет поровну. Сколько яблок в каждом ящике?

*Решение.* Пусть  $x$  — масса в первом ящике,  $y$  — во втором (кг). Вместе:  $x + y = 50$ .

После перекалывания: в первом стало  $(x - 5)$ , во втором  $(y + 5)$ , и они равны:  $x - 5 = y + 5 \rightarrow x - y = 10$ .  $\begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = 10 \end{cases}$  Сложим:  $2x = 60 \rightarrow x = 30$ . Тогда  $y = 50 - 30 = 20$ . **Проверка:**  $30 + 20 = 50 \checkmark$ ; после:  $30 - 5 = 25$  и  $20 + 5 = 25$  — поровну  $\checkmark$ .

**Ответ:** в первом 30 кг, во втором 20 кг.

---

**Пример 6.** Сплавляли 4 кг одного металла и 6 кг другого, получили сплав. Стоимость 1 кг первого металла на 200 рублей больше, чем второго, а весь сплав стоит 4400 рублей. Найди цену 1 кг каждого металла.

*Решение.* Пусть  $x$  — цена 1 кг первого металла,  $y$  — цена 1 кг второго (рублей).  
Первый дороже на 200:  $x - y = 200$ . Стоимость сплава:  $4x + 6y = 4400$ .  
 $\begin{cases} x - y = 200 \\ 4x + 6y = 4400 \end{cases}$   
Из первого  $x = y + 200$ . Подставим во второе:  $4(y + 200) + 6y = 4400$   
 $4y + 800 + 6y = 4400$   
 $10y = 3600$   
 $y = 360$ . Тогда  $x = 360 + 200 = 560$ .

**Проверка:**  $560 - 360 = 200$  ✓;  $4 \cdot 560 + 6 \cdot 360 = 2240 + 2160 = 4400$  ✓.

**Ответ:** первый металл 560 руб/кг, второй 360 руб/кг.



### Запомни главное

- Два неизвестных  $\rightarrow$  введи **две переменные** и обязательно запиши, что есть что.
- Два условия задачи  $\rightarrow$  два уравнения  $\rightarrow$  **система**.
- Двузначное число = **10·(десятки) + (единицы)**.
- Движение: путь = скорость  $\cdot$  время; по течению  **$v + u$** , против  **$v - u$** .
- Смеси и покупки: одно уравнение — про количество, другое — про стоимость/содержимое.
- В конце вернись к вопросу, запиши ответ словами и проверь его **по смыслу** (не бывает  $-3$  яблок).



### Домашнее задание

1. Сумма двух чисел 40, разность 8. Найди числа.
2. За 2 пирожных и 3 сока заплатили 240 рублей, а за 4 пирожных и 1 сок — 280 рублей. Найди цену пирожного и сока.
3. В двух коробках вместе 60 конфет. В первой на 12 конфет больше. Сколько конфет в каждой?

4. Двузначное число: сумма цифр 9, цифра десятков на 3 больше цифры единиц. Найди число.
5. Катер по течению за 1 час проходит 24 км, против течения — 16 км. Найди собственную скорость катера и скорость течения.
6. Билет для взрослого и для ребёнка вместе стоят 700 рублей. Взрослый дороже детского на 100 рублей. Сколько стоит каждый билет?
7. На ферме куры и кролики, всего 20 голов и 56 ног. Сколько кур и сколько кроликов? (Подсказка: у курицы 2 ноги, у кролика 4.)
8. За 5 кг яблок и 3 кг груш заплатили 510 рублей, а за 2 кг яблок и 4 кг груш — 400 рублей. Найди цену 1 кг яблок и 1 кг груш.
9. ☆ Двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр. Если к нему прибавить 18, цифры поменяются местами. Найди число. (Подсказка: пусть десятки  $x$ , единицы  $y$ ; число  $10x + y$ .)