Ответы к заданиям — Вероятность и парадоксы

Загляни сюда только после того, как сам(а) попробовал(а) решить!

Урок 1. Что такое вероятность

1. **1/3** — числа больше 4 это {5, 6}, два благоприятных исхода из шести: `2/6 = 1/3 ≈ 0,333`.
2. **4/5** — всего шаров `5+3+2 = 10`, зелёных 2. Через дополнение: `1 − 2/10 = 8/10 = 4/5 = 0,8`.
3. **1/2** — два равновозможных исхода (орёл, решка), один благоприятный: `1/2`.
4. **1/4** — червей 13 из 52: `13/52 = 1/4 = 0,25`.
5. **1/3** — кратные 3 это {3, 6}, два исхода: `2/6 = 1/3`.
6. **3/5** — мальчиков `30 − 12 = 18`: `18/30 = 3/5 = 0,6`.
7. **0,85** — противоположное к «опоздает»: `1 − 0,15 = 0,85`.
8. **93/100** — проиграть = вытянуть невыигрышный билет. Их `100 − 7 = 93`: `93/100 = 0,93`.

Урок 2. Комбинаторика вероятностей

1. **24** — это `4! = 1·2·3·4 = 24`.
2. **15 и 15** — `C(6,2) = 6!/(2!·4!) = 720/(2·24) = 15`, а `C(6,4) = 15` тоже. Совпадают, потому что `C(n,k) = C(n,n−k)`.
3. **120** — `C(10,3) = 10!/(3!·7!) = (10·9·8)/(3·2·1) = 720/6 = 120`.
4. **1/6** — дублей 6 штук: (1,1),(2,2),…,(6,6). Всего `36` исходов: `6/36 = 1/6 ≈ 0,167`.
5. **15/16** — через дополнение: «ни одного орла» = четыре решки `(1/2)⁴ = 1/16`. Значит `1 − 1/16 = 15/16 = 0,9375`.

6. **2/9** — дам 4 и королей 4, всего 8 благоприятных из 36: `8/36 = 2/9 ≈ 0,222`.
7. **0,488** — «промахнётся хотя бы раз» = `1 − P(все три попадания)`. Три попадания: `0,8³ = 0,512`. Значит `1 − 0,512 = 0,488`.
8. **2/15** — оба белых: `C(4,2)/C(10,2) = 6/45 = 2/15 ≈ 0,133`.

Урок 3. Парадокс дней рождения

1. **45** — `C(10,2) = (10·9)/2 = 45` пар.
2. **≈ 0,0082** — `P(все разные) = (365/365)·(364/365)·(363/365) ≈ 0,99180`. Тогда `P(совпадение) = 1 − 0,99180 ≈ 0,0082 ≈ 0,82%`.
3. **≈ 70,6%** — по таблице для 30 человек вероятность совпадения примерно 0,706.
4. **366 человек** — по принципу Дирихле: дней в году 365, а людей 366, тогда хотя бы двое обязательно попадут в один день. Вероятность становится ровно 1.
5. **Есть совпадение** — при 20 людях `P(совпадение) ≈ 0,411`, значит `P(все разные) ≈ 0,589`. «Все разные» пока вероятнее, но уже близко. (А вот при 23 совпадение перевешивает.) Ответ: при 20 вероятнее, что дни **разные**.
6. **≈ 0,00612** — `7!/7⁷ = 5040/823543 ≈ 0,00612`. Все семь родились в разные дни недели крайне маловероятно (7 гномов на 7 дней — это как «идеально угадать раскладку»).
7. **Разбор.** «Совпадает с моим» — это сравнение всех с одним фиксированным днём (мало шансов). «Есть совпадение в группе» — это сравнение **всех пар** между собой, а пар очень много (в 23 людях — 253 пары). Больше «попыток совпасть» — выше вероятность.

Урок 4. Парадокс Монти Холла

1. **1/3** — без смены выигрываешь, только если сразу угадал машину: вероятность 1/3.
2. **2/3** — со сменой выигрываешь, когда сразу **не** угадал, а это вероятность 2/3.

3. **60 машин** — `90 · 2/3 = 60`.
4. **Разбор.** Ведущий не выбирает дверь случайно: он знает, где машина, и всегда открывает козу. Он не даёт новой информации о твоей двери (её вероятность так и осталась 1/3), но вся вероятность 2/3 «второй группы» перетекает на единственную оставшуюся дверь. Поэтому не 50/50.
5. **3/8** — изначально твоя дверь 1/4, значит на две оставшиеся закрытые приходится `1 − 1/4 = 3/4`, поровну: `(3/4)/2 = 3/8` на каждую. (Менять выгодно: 3/8 > 1/4.)
6. **99/100** — при 100 дверях сразу угадал с вероятностью 1/100, значит смена выигрывает с вероятностью `99/100 = 0,99`.
7. **Разбор.** Если ведущий знает и специально открывает козу — он «фильтрует» варианты в твою пользу, и вероятность 2/3 концентрируется на одной двери. Если бы он открывал наугад и там случайно оказалась коза — эта фильтрация исчезает, и после такого случайного открытия оставшиеся две двери становятся равновероятны (по 1/2). Знание ведущего — суть парадокса.

Урок 5. Матожидание и честные игры

1. **0,5** — `E = 1·(1/2) + 0·(1/2) = 0,5`.
2. **–40 руб., невыгодна** — ожидаемый выигрыш `3000·(1/50) = 60` руб., чистый результат `60 − 100 = −40` руб. `E < 0` — лотерея невыгодна игроку.
3. **3,5 руб.** — матожидание очков кубика `21/6 = 3,5`. Честная цена участия равна 3,5 руб.
4. **–1/37 ≈ –0,027, в пользу казино** — `E = (+1)·(18/37) + (−1)·(19/37) = (18−19)/37 = −1/37 ≈ −0,027`. Игра против игрока.
5. **2,5 руб.** — два орла с вероятностью `1/4`, выигрыш 10 руб.: `E = 10·(1/4) = 2,5` руб.
6. **–1 руб., играть не стоит** — `E = 20·0,3 + (−10)·0,7 = 6 − 7 = −1` руб. Матожидание отрицательное.

7. **12 руб.** — честная игра: `E = выигрыш·(1/6) − 2 = 0`, значит `выигрыш = 2·6 = 12` руб. При шестёрке получаешь 12 руб.

Урок 6. Случайные блуждания и закон больших чисел

1. **3/8** — вернуться в 0 за 4 шага = 2 вправо и 2 влево: `C(4,2)/2⁴ = 6/16 = 3/8 = 0,375`.
2. **0** — каждый шаг имеет матожидание 0, значит и после 10 шагов ожидаемое положение `10·0 = 0`.
3. **≈ 1000 раз** — вероятность шестёрки 1/6, по закону больших чисел `6000·(1/6) = 1000`.
4. **≈ 3,144** — `π ≈ 4·(7860/10000) = 4·0,786 = 3,144`.
5. **Разбор (ошибка игрока).** Монета не помнит прошлое: вероятность орла всегда 1/2 независимо от предыдущих бросков. Серия из 6 решек не «обязывает» выпасть орлу. Закон больших чисел выравнивает частоту за счёт огромного числа бросков, а не «компенсацией» коротких серий.
6. **Не противоречит.** 13 орлов из 20 (65%) при малом числе бросков — обычное отклонение. При 20 бросках разброс велик, а при 20000 частота должна быть очень близка к 0,5 (закон больших чисел), поэтому 65% на 20000 было бы крайне подозрительно.
7. **0,3** — доля точек внутри ≈ доля площади: `1500/5000 = 0,3`. Площадь фигуры ≈ `0,3` (при площади квадрата 1).

Урок 7. Условная вероятность и формула Байеса

1. **1/3** — условие «больше 3» это {4,5,6}, три исхода. Из них 6 — один: `1/3`.
2. **1/18** — красных карт 18, дама червей среди них одна: `1/18 ≈ 0,056`.
3. **≈ 0,201 (20,1%)** — на 20000 человек больных `20000/200 = 100` (все дадут «+»), здоровых 19900, ложных «+» `19900·0,02 = 398`. Всего «+»: `100 + 398 = 498`. `P(болен | «+») = 100/498 ≈ 0,201`.

4. **Разбор.** `P(тест «+» | болен)` — насколько тест срабатывает у больных (свойство теста). `P(болен | тест «+»)` — насколько положительный результат означает болезнь (зависит ещё и от того, как редка болезнь). Из-за редкости болезни ложные «+» от многочисленных здоровых людей сильно снижают вторую величину.
5. **1/2 (50%)** — на 1000 такси синих 100, свидетель назовёт синими `100·0,9 = 90`; жёлтых 900, ошибётся `900·0,1 = 90`. Всего «синее»: `90 + 90 = 180`. `P = 90/180 = 0,5`.
6. **Разбор.** До первого теста «база подозреваемых» — всё население, где болезнь редка, поэтому ложных «+» много. После первого «+» база сужается до тех, кто дал положительный результат (в примере урока — 1099 человек), и среди них доля больных уже гораздо выше. Второй независимый «+» на этой суженной базе резко повышает вероятность болезни.
7. **5/8 (0,625)** — на 1000 деталей: первый станок 600 деталей, брака `600·0,02 = 12`; второй 400 деталей, брака `400·0,05 = 20`. Всего бракованных `12 + 20 = 32`. `P(второй | брак) = 20/32 = 5/8 = 0,625`.