Урок 2. Комбинаторика вероятностей

Вероятность и парадоксы · ~35 минут

Чтобы посчитать вероятность, нужно уметь считать исходы. А исходов бывает много — миллионы и миллиарды. Перебирать их руками невозможно, поэтому нам понадобится комбинаторика: искусство считать, **не перечисляя**.

🎯 Что ты узнаешь

- Правило произведения — как считать составные выборы.
- Перестановки и сочетания `C(n,k)`.
- Как перемножать вероятности независимых событий.
- Мощный приём «хотя бы один» через противоположное событие.

📖 Разбираемся в теме

Правило произведения

Если первый выбор можно сделать `m` способами, а второй (независимо) — `n` способами, то вместе их можно сделать `m · n` способами.

Пример: в кафе 3 первых блюда и 4 вторых. Обед из первого и второго можно составить `3 · 4 = 12` способами.

Бросок двух кубиков даёт `6 · 6 = 36` равновозможных исходов.

Перестановки

Перестановка — способ расставить `n` различных предметов по порядку. Их число:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Например, `3! = 6`: три книги можно расставить на полке 6 способами. По определению `0! = 1`.

Сочетания

Часто порядок не важен — важно только, **какие** предметы выбрали. Число способов выбрать `k` предметов из `n` (без учёта порядка) — это **число сочетаний**:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!,(n-k)!}.$$

Пример: сколькими способами выбрать 2 дежурных из 5 учеников?

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!,3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10.$$

> 🤔 **А знаешь ли ты?** `C(n,k) = C(n, n−k)`. Выбрать, кого взять, — то же самое, что выбрать, кого не взять. Поэтому `C(5,2) = C(5,3) = 10`.

Независимые события: умножаем вероятности

Два события **независимы**, если исход одного не влияет на другой (два разных кубика, две монеты). Для независимых событий:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример: вероятность выбросить два орла подряд:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

> ⚠️ Умножать вероятности можно **только для независимых** событий. Если достаём два шара **без возврата**, второй выбор зависит от первого — там уже нельзя просто перемножать одинаковые дроби.

Приём «хотя бы один»

Считать «хотя бы один» напрямую тяжело: это «один, или два, или три...». Зато противоположное — «ни одного» — считается легко и часто через произведение:

$$P(\text{хотя бы один}) = 1 - P(\text{ни одного}).$$

> 📌 **Запомни:** увидел(а) слова «хотя бы один» — сразу думай про дополнение «ни одного».

✍️ Разбор примера

Пример 1. Бросают два кубика. Какова вероятность, что сумма очков равна 7?

Всего исходов: $6 \cdot 6 = 36$. Сумму 7 дают пары: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) — ровно 6 штук.

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167.$$

Пример 2. Монету бросают 3 раза. Какова вероятность, что выпадет **хотя бы один** орёл?

Проще через дополнение. «Ни одного орла» = «три решки подряд»:

$$P(\text{три решки}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Тогда

$$P(\text{хотя бы один орёл}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \approx 0{,}875.$$

📝 Задачи

1. Сколькими способами можно расставить на полке 4 разные книги?
2. Вычисли $C(6,2)$ и $C(6,4)$. Что замечаешь?
3. В классе 10 человек. Сколькими способами выбрать из них команду из 3 человек (порядок не важен)?
4. Бросают два кубика. Какова вероятность, что выпадут два одинаковых числа (дубль)?
5. Монету бросают 4 раза. Какова вероятность, что выпадет хотя бы один орёл?
6. Из колоды 36 карт наугад берут одну. Какова вероятность, что это дама **или** король? (Дам 4, королей 4.)
7. Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8. Он стреляет 3 раза (выстрелы независимы). Какова вероятность, что он **промахнётся хотя бы раз**?

8. В коробке 4 белых и 6 чёрных шаров. Наугад (без возврата) достают два шара. Какова вероятность, что **оба белые**? (Подсказка: используй сочетания — `C(4,2) / C(10,2)`.)