Урок 3. Парадокс дней рождения

Вероятность и парадоксы · ~35 минут

Представь класс из 23 человек. Спорим, что у кого-то из них совпадают дни рождения? Интуиция кричит: «Да ну, 23 человека против 365 дней — какое там совпадение!» А математика отвечает: вероятность больше 50%. Это один из самых знаменитых парадоксов теории вероятностей — и сейчас мы его разоблачим.

🎯 Что ты узнаешь

- Почему совпадений больше, чем кажется.
- Как считать «хотя бы одно совпадение» через дополнение.
- Как вероятность растёт с числом людей.

📖 Разбираемся в теме

В чём подвох интуиции

Мозг подсознательно спрашивает: «Какова вероятность, что кто-то родился в **мой** день рождения?» Это редко. Но настоящий вопрос другой: «Какова вероятность, что **хоть у какой-то пары** из всех совпадают дни рождения?»

А пар в группе очень много! В группе из 23 человек число пар:

$$C_{23}^2 = \frac{23 \cdot 22}{2} = 253.$$

253 пары — и каждая может «выстрелить» совпадением. Вот откуда берётся высокая вероятность.

> 🤔 **А знаешь ли ты?** Этот парадокс используют в криптографии — «атака дней рождения» помогает находить коллизии хеш-функций гораздо быстрее, чем кажется на первый взгляд.

Считаем через дополнение

Считать «хотя бы одно совпадение» напрямую очень сложно. Идём через противоположное событие — «**все дни рождения разные**».

Будем считать, что в году 365 дней и все дни равновероятны. Заводим людей по одному:

- 1-й человек — любой день, вероятность «не совпасть ни с кем» = 365/365.
- 2-й должен попасть в один из оставшихся 364 дней: 364/365.
- 3-й — в один из 363 свободных дней: 363/365.
- ...
- `k`-й — в один из `365 − (k−1)` дней.

Перемножаем (события независимы при таком подсчёте):

$$P(\text{все разные}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-(k-1)}{365}.$$

А нужная нам вероятность:

$$P(\text{совпадение}) = 1 - P(\text{все разные}).$$

Что получается для 23 человек

Перемножив дроби от 365/365 до 343/365 (это 23 множителя), получаем:

$$P(\text{все разные}) \approx 0{,}4927.$$

Значит,

$$P(\text{совпадение}) \approx 1 - 0{,}4927 = 0{,}5073 \approx 50{,}7\%.$$

Больше половины! Уже в группе из 23 человек ставка «есть совпадение» выигрышная.

> 📌 **Запомни:** «хотя бы одно совпадение» = `1 − P(все различны)`. Это ключ ко всему парадоксу.

Как растёт вероятность

Число людей	P(совпадение)
5	≈ 2,7%
10	≈ 11,7%
20	≈ 41,1%
23	**≈ 50,7%**
30	≈ 70,6%
50	≈ 97,0%
60	≈ 99,4%
70	≈ 99,9%

Уже при 60 людях совпадение практически гарантировано. А чтобы дойти до 100%, нужно… 366 человек (по принципу Дирихле: 365 дней на 366 людей — кто-то обязательно совпадёт).

> 💡 Обрати внимание: рост сначала медленный, потом резко ускоряется около 20–30 человек, а после — почти выходит на «плато» у единицы.

✍️ Разбор примера

Задача. Посчитаем вероятность совпадения для группы из 4 человек.

`P(все разные)`:

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365}.$$

Считаем шаг за шагом:

- `364/365 ≈ 0,99726`
- `× 363/365 ≈ 0,99726 · 0,99452 ≈ 0,99180`

- `× 362/365 ≈ 0,99180 · 0,99178 ≈ 0,98364`

Значит `P(все разные) ≈ 0,9836`, и

$$P(\text{совпадение}) \approx 1 - 0{,}9836 = 0{,}0164 \approx 1{,}6\%.$$

Для четырёх человек совпадение маловероятно — но с ростом группы дроби быстро «съедают» вероятность.

📝 Задачи

1. Сколько пар можно составить в группе из 10 человек? (Используй `C(10,2)`.)
2. По формуле через дополнение запиши выражение для `P(все дни разные)` для 3 человек и вычисли `P(совпадение)`.
3. На вечеринке 30 человек. По таблице выше: какова вероятность, что есть совпадение дней рождения?
4. Сколько человек нужно, чтобы совпадение стало **достоверным** (вероятность ровно 1)? Объясни через принцип Дирихле.
5. В классе 20 человек. Что вероятнее: что есть совпадение или что все дни разные? (Опирайся на таблицу.)
6. Представь «неделю» из 7 дней: у семи гномов дни недели рождения независимы и равновероятны. Какова вероятность, что все семь родились в **разные** дни недели? (Подсказка: `7!/7^7`.)
7. Почему вопрос «совпадает ли чей-то день рождения с моим» даёт гораздо меньшую вероятность, чем «есть ли вообще какое-то совпадение в группе»? Объясни словами.