

Урок 4. Парадокс Монти Холла

Вероятность и парадоксы · ~35 минут

Телешоу. Перед тобой три двери. За одной — автомобиль, за двумя другими — козы. Ты выбираешь дверь. Ведущий (он знает, где машина) открывает одну из оставшихся дверей — там коза. И спрашивает: «Хочешь поменять свой выбор на другую закрытую дверь?» Менять или нет? Этот вопрос когда-то расколол математическое сообщество и довёл до споров сотни профессоров. Правильный ответ: **менять**. И это не 50/50.


Что ты узнаешь

- Почему смена двери даёт вероятность выигрыша $2/3$, а не $1/2$.
- Как ведущий «передаёт» тебе информацию, открывая дверь.
- Как убедиться в ответе полным перебором.

Разбираемся в теме

Условия задачи (важно каждое слово!)

1. Машина спрятана случайно за одной из трёх дверей.
2. Ты выбираешь дверь, но не открываешь её.
3. Ведущий **знает**, где машина, и **всегда** открывает дверь с козой — не ту, что ты выбрал.
4. Затем предлагает поменять выбор на вторую закрытую дверь.

 Ключевое: ведущий открывает козу **не случайно**. Он специально избегает и твоей двери, и машины. Именно это делает задачу парадоксальной. Если бы он открывал наугад — задача была бы другой.

Разбор: почему 2/3

Посмотри на момент **первого** выбора. Вероятность, что ты сразу угадал(а) машину:


$$P(\text{угадал сразу}) = \frac{1}{3}.$$

Вероятность, что машина за одной из двух других дверей:

$$P(\text{не угадал}) = \frac{2}{3}.$$

Теперь ведущий открывает козу за одной из тех двух дверей. Вся вероятность 2/3 «схлопывается» на **единственную** оставшуюся закрытую дверь.

- Если **не менять** — выигрываешь только когда угадал сразу: **1/3**.
- Если **менять** — выигрываешь когда сразу **не** угадал: **2/3**.

 **Запомни:** смена двери выигрывает ровно тогда, когда первый выбор был неверным. А первый выбор неверен с вероятностью 2/3.

Полный перебор

Пусть машина за дверью 1 (остальные случаи симметричны). Ты выбираешь каждую из дверей с вероятностью 1/3. Смотрим стратегию «всегда менять»:

Твой выбор	Где машина	Ведущий открывает	Меняешь на	Результат
1	1	2 или 3	3 или 2	 коза
2	1	3	1	 машина
3	1	2	1	 машина

Из трёх равновозможных случаев смена даёт машину в **двух**. Значит $P(\text{выигрыш при смене}) = 2/3$. А без смены — наоборот, 1/3.

Наглядное объяснение: сто дверей

Представь **100** дверей. За одной машина. Ты тыкаешь в дверь №1 (шанс угадать 1/100). Ведущий открывает 98 других дверей — везде козы — и оставляет

закрытой одну, скажем, №57.

Что вероятнее: что ты угадал(а) с первого тыка ($1/100$), или что машина за той единственной дверью, которую ведущий «пощадил» ($99/100$)? Конечно, менять! Ведущий фактически показал тебе, где приз.

💡 Чем больше дверей, тем очевиднее выгода смены. С тремя дверями разница ($1/3$ против $2/3$) просто менее заметна интуитивно.

Разбор примера

Задача. Ты играешь по стратегии «всегда меняю дверь» 300 раз. Сколько машин ты выиграешь в среднем?

Вероятность выигрыша при смене = $2/3$. Ожидаемое число выигрышей:

$$300 \cdot \frac{2}{3} = 200.$$

Для сравнения, стратегия «никогда не меняю» дала бы в среднем $300 \cdot 1/3 = 100$ машин. Смена двери — вдвое выгоднее.

Ответ: около 200 машин.

Задачи

1. Какова вероятность выиграть машину, если ты **никогда** не меняешь дверь?
2. Какова вероятность выиграть, если ты **всегда** меняешь дверь?
3. Игрок сыграл по стратегии «всегда меняю» 90 раз. Сколько машин он выиграет в среднем?
4. Объясни своими словами, почему после того, как ведущий открыл козу, шансы **не** становятся 50/50.
5. Пусть дверей 4. За одной машина. Ты выбираешь одну, ведущий открывает **одну** дверь с козой (из трёх оставшихся) и предлагает поменять на любую из двух оставшихся закрытых. Какова вероятность, что машина за **конкретной**

из этих двух? (Подсказка: у тебя изначально $1/4$; оставшиеся $3/4$ делятся на две закрытые двери.)

6. В варианте со 100 дверьми: ты выбрал(а) дверь, ведущий открыл 98 коз. Какова вероятность выиграть, если поменяешь?
7. Почему для парадокса критически важно, что ведущий **знает**, где машина, и специально открывает козу? Что было бы, если бы он открывал дверь наугад и там случайно оказалась коза?