

Урок 5. Матожидание и честные игры

Вероятность и парадоксы · ~35 минут

Казино всегда в выигрыше. Лотерейный билет почти всегда убыточен. И это не потому что «не повезло» — это математика, зашитая в правила игры. Инструмент, который всё объясняет, называется **математическое ожидание**. С ним ты научишься видеть, выгодна игра или нет, ещё до того, как в неё сыграешь.

Что ты узнаешь

- Что такое математическое ожидание (средний выигрыш).
- Как отличить честную игру от нечестной.
- Почему казино и лотереи всегда в плюсе.

Разбираемся в теме


Что такое матожидание

Представь игру с несколькими исходами. У каждого исхода — своя вероятность и свой выигрыш (может быть и отрицательный — проигрыш). **Математическое ожидание** — это средний выигрыш, если играть очень-очень много раз.

Если возможны выигрыши x_1, x_2, \dots, x_n с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n , то

$$E = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Каждый выигрыш умножаем на его вероятность и всё складываем.

 Матожидание — это не тот результат, который выпадет в одной игре. Это **среднее по многим играм**. За один раз выпадет что-то конкретное, но в среднем игрок получит именно E за партию.

Пример: бросок кубика

Сколько очков выпадет на кубике «в среднем»? Все шесть исходов равновероятны (по 1/6):


$$E = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5.$$

Интересно: значение 3,5 на кубике выпасть не может! Но среднее по многим броскам стремится именно к 3,5.

Честная и нечестная игра

Пусть за участие в игре ты платишь взнос. Смотри на **ЧИСТЫЙ** результат = выигрыш минус взнос.

- **Честная игра:** матожидание чистого результата $E = 0$. В среднем ни в плюсе, ни в минусе.
- **Выгодная игроку:** $E > 0$.
- **Невыгодная (нечестная к игроку):** $E < 0$.

 **Запомни:** игра честная, когда справедливая цена участия равна матожиданию выигрыша. Если с тебя берут больше — игра против тебя.

Почему казино всегда выигрывает

Возьмём рулетку (европейская, 37 секторов: числа 0–36). Ставишь 1 монету на конкретное число. Если угадал — получаешь 36 монет (то есть чистый выигрыш +35), если нет — теряешь свою 1 монету.

$$E = (+35) \cdot \frac{1}{37} + (-1) \cdot \frac{36}{37} = \frac{35 - 36}{37} = -\frac{1}{37} \approx -0,027.$$

В среднем игрок теряет около 2,7 копейки с каждой поставленной монеты. Один сектор — «зеро» — это и есть преимущество казино. Играй хоть миллион раз: чем больше играешь, тем надёжнее ты в минусе.

🤔 **А знаешь ли ты?** В американской рулетке два нуля (0 и 00), всего 38 секторов. Матожидание там ещё хуже для игрока: примерно $-2/38 \approx -0,053$, то есть $-5,3\%$.

Почему лотерея убыточна

Организатор лотереи собирает деньги с билетов и часть оставляет себе. Поэтому призовой фонд всегда **меньше** собранной суммы. Значит, средний выигрыш на билет меньше его цены — матожидание чистого результата отрицательное. Лотерея — это «налог на надежду»: изредка кто-то срывает джекпот, но в среднем каждый билет убыточен.

⚠️ Отрицательное матожидание не значит, что ты обязательно проиграешь в одной игре. Можно и выиграть! Но чем дольше играешь, тем ближе твой средний результат к отрицательному E . Об этом — в следующем уроке (закон больших чисел).

👉 Разбор примера

Задача. Игра: бросаешь кубик. Если выпало 6 — получаешь 30 рублей. Иначе — ничего. Участие стоит 4 рубля. Выгодна ли игра?

Выигрыш (без учёта взноса): 30 руб. с вероятностью $1/6$, и 0 руб. с вероятностью $5/6$.

$$E_{\{\text{выигрыш}\}} = 30 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{5}{6} = 5 \text{ руб.}$$

Справедливая цена участия — 5 рублей. С тебя берут только 4. Значит чистое матожидание:

$$E_{\{\text{чист}\}} = 5 - 4 = +1 \text{ руб.}$$

$E > 0$ — игра **выгодна игроку!** В среднем ты зарабатываешь 1 рубль за партию. (Редкий случай, когда стоит играть.)

Ответ: выгодна, ожидаемая прибыль +1 руб. за игру.



Задачи

1. Найди матожидание числа очков при броске монеты, если орёл = 1 очко, решка = 0 очков.
2. Лотерея: билет стоит 100 руб. С вероятностью $1/50$ выиграш 3000 руб., иначе — ничего. Найди матожидание чистого результата. Выгодна ли лотерея игроку?
3. Игра: бросаешь кубик, получаешь столько рублей, сколько выпало очков. Сколько справедливо заплатить за участие, чтобы игра была честной?
4. В рулетке ты ставишь 1 монету на «красное» (18 красных секторов из 37). При выигрыше получаешь чистыми +1 монету, при проигрыше теряешь 1. Найди матожидание. В чью пользу игра?
5. Игра: подбрасываешь две монеты. За два орла платят 10 руб., иначе ничего. Сколько стоит справедливое участие?
6. В игре с вероятностью 0,3 выигрываешь 20 руб., с вероятностью 0,7 теряешь 10 руб. Найди матожидание. Стоит ли играть?
7. Придумай выигрыш за событие «выпала 6 на кубике» так, чтобы игра со взносом 2 рубля стала **честной** ($E = 0$). (Выигрыш получаешь только при шестёрке.)