Урок 6. Случайные блуждания и закон больших чисел

Вероятность и парадоксы · ~35 минут

Пьяница вышел из бара и стоит у фонаря. Каждый шаг он делает наугад — влево или вправо, с равной вероятностью. Куда он в итоге придёт? Оказывается, случайность подчиняется строгим законам. Сегодня мы увидим, как из полного хаоса отдельных бросков рождается железная закономерность.

🎯 Что ты узнаешь

- Что такое симметричное случайное блуждание.
- Закон больших чисел: почему частота стремится к вероятности.
- Метод Монте-Карло и как им оценить число π.

📖 Разбираемся в теме

Пьяница у фонаря

Человек стоит в точке 0 на прямой. Каждую секунду он с вероятностью 1/2 шагает вправо (+1) и с вероятностью 1/2 влево (−1). Это **симметричное случайное блуждание**.

Куда он придёт **в среднем**? Каждый шаг имеет матожидание `(+1)·½ + (−1)·½ = 0`. Значит в среднем он стоит на месте — его ожидаемое положение равно 0.

Но «в среднем 0» не значит «стоит на месте»! Он расходится всё дальше от фонаря — просто одинаково вероятно в обе стороны. Математики доказали: типичное **удаление** от старта растёт примерно как `√n` за `n` шагов. За 100 шагов он окажется в среднем на расстоянии порядка 10 от фонаря, за 10000 шагов — порядка 100.

> 🤔 **А знаешь ли ты?** В одномерном и двумерном блуждании пьяница рано или поздно **обязательно** вернётся к фонарю. А вот в трёхмерном (полёт в космосе) — уже нет: вероятность вернуться меньше 1. Про это есть шутка: «пьяница найдёт дорогу домой, а пьяная птица — нет».

Закон больших чисел

Подбрось монету 10 раз — может выпасть 7 орлов (70%), это нормально. Подбрось 10000 раз — доля орлов будет очень близка к 50%.

Закон больших чисел: при большом числе испытаний **частота** события (доля, сколько раз оно случилось) стремится к его **вероятности**.

$$\frac{\text{число успехов}}{\text{число испытаний}} \longrightarrow P.$$

Именно поэтому казино и страховые компании всегда в плюсе: на одной игре бывает как повезёт, но на миллионах ставок средний результат почти в точности равен матожиданию.

> 📌 **Запомни:** закон больших чисел связывает теорию (вероятность P) и практику (наблюдаемую частоту). Чем больше испытаний, тем они ближе.

> ⚠️ Осторожно с «ошибкой игрока»! Если выпало пять решек подряд, монета **не** «обязана» теперь выдать орла. Монета не помнит прошлое. Закон больших чисел работает за счёт огромного числа бросков, а не за счёт «выравнивания» коротких серий.

Метод Монте-Карло: измеряем π точками

Раз частота стремится к вероятности, можно действовать наоборот: **бросать случайные точки и по частоте измерять вероятность**, а из неё — вычислять что-то полезное. Это метод Монте-Карло.

Возьмём квадрат со стороной 1 и впишем в него четверть круга радиуса 1 (центр в углу). Площадь квадрата = 1. Площадь четверти круга = $\pi \cdot 1^2/4 = \pi/4$.

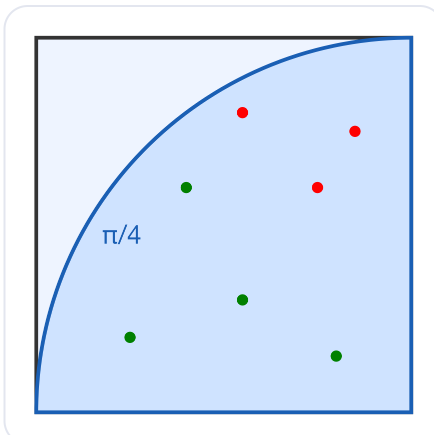
Бросаем в квадрат случайные точки. Вероятность попасть под дугу (в четверть круга) равна отношению площадей:

$$P(\text{под дугой}) = \frac{\pi/4}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

Значит доля попавших точек ≈ $\pi/4$, откуда

$$\pi \approx 4 \cdot \frac{\text{точек под дугой}}{\text{всего точек}}.$$

Точка (x, y) попадает в четверть круга, если $x^2 + y^2 \le 1$. Бросив, скажем, миллион точек, получим π с хорошей точностью!



Зелёные точки — под дугой, красные — снаружи. Доля зелёных ≈ $\pi/4$.

> 💡 Метод Монте-Карло применяют по-настоящему: в физике элементарных частиц, финансах, компьютерной графике — везде, где точную формулу вывести трудно, а «набросать случайных точек» легко.

✍️ Разбор примера

Задача. Монету бросили 1000 раз, орёл выпал 517 раз. Оцени вероятность орла по этим данным. Согласуется ли это с честной монетой?

Частота орла:

$$\frac{517}{1000} = 0{,}517.$$

По закону больших чисел частота ≈ вероятность, так что оценка `P(орёл) ≈ 0,517`. Это очень близко к теоретическим 0,5 — отклонение всего 0,017. Для 1000 бросков такое небольшое отклонение совершенно нормально, монету можно считать честной.

Ответ: оценка ≈ 0,517; это согласуется с честной монетой (P = 0,5).

📝 Задачи

1. Пьяница делает 4 шага, каждый ±1 равновероятно. Какова вероятность вернуться в 0? (Подсказка: нужно 2 шага вправо и 2 влево; используй `C(4,2)/2⁴`.)
2. Каково матожидание положения пьяницы после 10 шагов симметричного блуждания?
3. Кубик бросили 6000 раз. Сколько примерно раз выпадет шестёрка (по закону больших чисел)?
4. В методе Монте-Карло из 10000 точек под дугой оказалось 7860. Оцени π.
5. Игрок говорит: «Выпало 6 решек подряд, значит следующий бросок точно орёл». В чём его ошибка?
6. Монету бросили 20 раз и получили 13 орлов (65%). Противоречит ли это честности монеты? Почему такое отклонение при 20 бросках нормально, а при 20000 — было бы подозрительно?
7. Чтобы методом Монте-Карло оценить долю площади фигуры внутри квадрата, бросили 5000 точек, внутри фигуры оказалось 1500. Оцени площадь фигуры (сторона квадрата = 1).