

# Урок 11. Отклонения значений от среднего

Вероятность и статистика, 7 класс · Глава 2. Описательная статистика · ~45 минут

## Что ты узнаешь


- Что такое **отклонение** значения от среднего арифметического и как его посчитать.
- Почему сумма всех отклонений всегда равна нулю (и почему это не случайность).
- Зачем нужен **модуль отклонения** и что такое **разброс** данных.
- Как по отклонениям понять, кто «как все», а кто «выбивается».

## Разбираемся в теме

Представь: вы вчетвером скинулись на пиццу. Ты дал 200 ₽, друг — 300 ₽, сестра — 100 ₽, а младший брат — 0 ₽ (он просто пришёл поесть, мелкий же). Сколько в среднем дал один человек?

$$\bar{x} = \frac{200 + 300 + 100 + 0}{4} = \frac{600}{4} = 150 \text{ \text{₽}}.$$

Среднее — 150 ₽. Но **никто** не дал ровно 150! Кто-то больше, кто-то меньше. Вот это «насколько я выше или ниже среднего» и называется **отклонением**.

 **Запомни: Отклонение** значения от среднего — это разность «значение минус среднее»:  $\text{отклонение} = x - \bar{x}$ . Если число **больше** среднего — отклонение **положительное**. Если **меньше** — **отрицательное**.

Посчитаем отклонения для нашей пиццы (среднее  $\bar{x} = 150$ ):

Человек	Дал, ₹ (\$x\$)	Отклонение ( $x - \bar{x}$ )
Ты	200	$\$200 - 150 = +50\$$
Друг	300	$\$300 - 150 = +150\$$
Сестра	100	$\$100 - 150 = -50\$$
Брат	0	$\$0 - 150 = -150\$$


Отклонение показывает, **на сколько и в какую сторону** значение ушло от среднего. Друг — «щедрый» (+150), брат — «прижимистый» (−150).

### Главный фокус: сумма отклонений = 0


Сложи последний столбик:

$$+\$50 + (+150) + (-50) + (-150) = 0.\$$$

Ноль! И это не везение. Так будет **всегда**, для любого набора чисел.

 **А знаешь ли ты?** Среднее арифметическое — это как точка равновесия качелей. Те, кто выше среднего, «перевешивают» ровно настолько, насколько те, кто ниже, «недовешивают». Поэтому плюсы и минусы взаимно уничтожаются, и в сумме получается ровно 0.

Почему так? Среднее устроено так, что «излишки» одних в точности компенсируют «нехватку» других. Это и есть смысл среднего: оно стоит посередине так, чтобы суммарный перевес в обе стороны был одинаков.


 **Частая ошибка:** «Сумма отклонений равна нулю — значит, разброса нет, все одинаковые». Нет! Сумма нулевая **всегда**, даже если числа очень разные. Просто плюсы гасят минусы. Чтобы измерить разброс, минусы нужно убрать.

## Как же измерить разброс? Берём модуль!


Если плюсы и минусы всё портят, давай **уберём знаки** — возьмём модуль (абсолютную величину) каждого отклонения. Модуль показывает чистое расстояние от среднего, без направления.

| Человек | Отклонение | Модуль отклонения  $|x - \bar{x}|$  | |---|---|---| | Ты |  $+50$  | 50 | | Друг |  $+150$  | 150 | | Сестра |  $-50$  | 50 | | Брат |  $-150$  | 150 |

Теперь сумма модулей:  $50 + 150 + 50 + 150 = 400$ . Уже не ноль! По модулям видно: брат и друг «удалены» от среднего сильно (на 150), а ты с сестрой — близко (на 50).

 **Лайфхак:** Хочешь быстро понять, «кучные» данные или «разбросанные»? Посмотри на модули отклонений. Маленькие модули — все жмутся к среднему. Большие модули — числа разлетелись.

**Разброс** — это про то, насколько сильно числа разбегаются от среднего. Чем больше модули отклонений, тем больше разброс. (Самую простую меру разброса — **размах** — ты уже знаешь: это «наибольшее минус наименьшее».)

 **Попробуй сам.** Набор оценок: 3, 4, 5, 4. Найди среднее, посчитай все четыре отклонения и проверь, что в сумме получится 0.

### Разбор примеров

#### Пример 1. Находим отклонения

Набор: 6, 9, 12. Найди среднее и отклонения каждого значения.

**Решение.**  $\bar{x} = \frac{6 + 9 + 12}{3} = \frac{27}{3} = 9$ . Отклонения:  $6 - 9 = -3$ ;  $9 - 9 = 0$ ;  $12 - 9 = +3$ . **Ответ:** среднее 9; отклонения  $-3$ ,  $0$ ,  $+3$ .

#### Пример 2. Проверяем, что сумма равна нулю

Для набора из примера 1 проверь сумму отклонений.

**Решение.**  $(-3) + 0 + (+3) = 0$ . Сходится — как и должно быть.

### Пример 3. Восстанавливаем значение по отклонению

Среднее набора равно 20. Известно, что отклонение одного из значений равно  $-7$ . Чему равно само значение?

**Решение.** Раз  $x - \bar{x} = -7$  и  $\bar{x} = 20$ , то  $x = 20 + (-7) = 13$ . **Ответ:** 13.

### Пример 4. Сумма модулей отклонений

Набор: 2, 4, 4, 10. Найди среднее и сумму модулей отклонений.

**Решение.**  $\bar{x} = \frac{2 + 4 + 4 + 10}{4} = \frac{20}{4} = 5$ . Отклонения:  $2-5=-3$ ;  $4-5=-1$ ;  $4-5=-1$ ;  $10-5=+5$ . Модули: 3, 1, 1, 5. Сумма модулей:  $3 + 1 + 1 + 5 = 10$ . **Ответ:** среднее 5; сумма модулей отклонений 10.

### Пример 5. Кто дальше от среднего?

Рост (см) четырёх друзей: 150, 160, 170, 180. Кто отклоняется от среднего сильнее всех?

**Решение.**  $\bar{x} = \frac{150 + 160 + 170 + 180}{4} = \frac{660}{4} = 165$ .  
Модули отклонений:  $|150-165|=15$ ;  $|160-165|=5$ ;  $|170-165|=5$ ;  $|180-165|=15$ .  
Сильнее всех (на 15 см) отклоняются ребята с ростом 150 и 180. **Ответ:** рост 150 и 180 (модуль отклонения 15 см).

### Пример 6. Используем «сумма отклонений = 0»

В наборе из 5 чисел отклонения четырёх из них равны:  $+4$ ,  $-2$ ,  $+1$ ,  $-1$ . Чему равно отклонение пятого числа?

**Решение.** Все отклонения в сумме дают 0. Сумма известных:  $4 - 2 + 1 - 1 = 2$ .  
Значит, пятое отклонение равно  $-2$  (чтобы итог стал 0). **Ответ:**  $-2$ .



### Запомни главное

- **Отклонение**  $= x - \bar{x}$  (значение минус среднее). Знак показывает, выше или ниже среднего значение.

- **Сумма всех отклонений всегда равна 0** — это свойство среднего, проверка любого расчёта.
- **Модуль отклонения**  $|x - \bar{x}|$  — расстояние до среднего без знака; по нему видно, кто «выбивается».
- **Разброс** — насколько сильно данные разбегаются от среднего. Размах (макс – мин) — простейшая мера разброса.



## Домашнее задание

1. Набор: 5, 8, 11. Найди среднее и все отклонения.
2. Проверь для задания 1, что сумма отклонений равна нулю.
3. Набор: 10, 10, 10, 10. Найди среднее, отклонения и сумму модулей отклонений. Что особенного?
4. Среднее набора равно 50. Отклонение одного значения равно  $+12$ . Найди это значение.
5. Набор: 1, 3, 3, 5, 8. Найди среднее и сумму модулей отклонений.
6. В наборе из 4 чисел три отклонения равны  $+5$ ,  $-3$ ,  $-6$ . Найди четвёртое отклонение.
7. Температура в полдень за 5 дней ( $^{\circ}\text{C}$ ): 18, 20, 22, 19, 21. Найди среднее и определи, в какой день отклонение от среднего было наибольшим по модулю.
8. ★ Придумай набор из 4 чисел, у которого среднее равно 6, а сумма модулей отклонений равна 8. (Подсказка: подбери пары значений выше и ниже 6.)