Урок 15. Примеры случайной изменчивости

Вероятность и статистика, 7 класс · Глава 3. Случайная изменчивость · ~45 минут

🎯 Что ты узнаешь

- Как случайная изменчивость проявляется в **измерениях с погрешностью** и в **росте людей**.
- Что происходит при **многократном** броске монеты и кубика.
- Главное чудо статистики: **устойчивость частот** — почему частота приближается к чему-то определённому.
- Как эта устойчивость подводит нас к понятию **вероятности**.

📖 Разбираемся в теме

На прошлых уроках ты узнал, что результаты повторных опытов разбросаны — это случайная изменчивость. Сегодня разберём её на трёх ярких примерах и поймаем главную закономерность.

Пример 1: измерения с погрешностью

Учёные измерили один и тот же стержень точным прибором 7 раз (мм):

> 50,2; 50,1; 50,3; 50,0; 50,2; 50,1; 50,2

Стержень один! Почему числа разные? Потому что у любого измерения есть **погрешность** — крошечные неизбежные неточности (дрожание руки, температура, как лёг прибор). Но заметь: все числа толпятся около **50,1–50,2 мм**. Истинная длина где-то здесь.

> 💡 **Лайфхак:** Чтобы из набора измерений получить лучшую оценку настоящей величины, берут **среднее арифметическое**. Случайные «плюс-минус» при усреднении гасят друг друга, и ответ становится точнее. Среднее здесь: $(50{,}2+50{,}1+50{,}3+50{,}0+50{,}2+50{,}1+50{,}2)/7 = 351{,}1/7 \approx 50{,}16$ мм.

Пример 2: рост учеников

Измерь рост всех в классе — числа будут разными. Но не как попало: почти все окажутся в узкой полосе (например, 145–165 см), а у самой середины ребят больше всего. Построй гистограмму — получится «горка». Так устроена изменчивость роста: разнообразие есть, но оно **упорядочено**.

> 🤔 **А знаешь ли ты?** Такую «горку» — много значений в середине, мало по краям — статистики видят повсюду: в росте, весе, размере обуви, времени реакции. Её называют колоколообразной формой, потому что она похожа на колокол.

Пример 3: монета и кубик много раз

Вот тут начинается самое интересное. Брось монету 10 раз. «Орлов» может выпасть 4, или 6, или 7 — как повезёт. Доля «орлов» скачет: 0,4; 0,6; 0,7… Кажется, никакого порядка.

Но брось монету **много** раз — и доля «орлов» перестаёт скакать и **застывает около 0,5**. Смотри, как это выглядит в опыте (числа примерные):

Число бросков	Выпало «орлов»	Доля «орлов»
10	7	0,70
50	27	0,54
100	48	0,48
500	254	0,508

Число бросков	Выпало «орлов»	Доля «орлов»
1000	503	0,503

Видишь? Чем больше бросков, тем ближе доля «орлов» к **0,5**. Колебания становятся всё меньше.

> 📌 **Запомни: Устойчивость частот** — при большом числе повторений относительная частота события почти перестаёт меняться и приближается к определённому числу. Для честной монеты это число — 0,5; для одной грани честного кубика — около 0,167 ($\approx 1/6$).

То же с кубиком: за 6 бросков «шестёрка» может не выпасть ни разу, а может — дважды. Но за 6000 бросков она выпадет примерно $6000 : 6 = 1000$ раз, и её доля будет около $1/6 \approx 0{,}167$.

> ⚠️ **Частая ошибка:** ждать «ровно половину» уже на 10 бросках. На малом числе бросков отклонения большие и нормальные (7 орлов из 10 — обычное дело). Устойчивость проявляется только на **больших** числах.

При чём тут вероятность?

Вот мостик к следующей главе. Раз частота события при многих повторениях устойчиво приближается к какому-то числу, можно это число считать **мерой того, насколько событие ожидаемо**. Это число и есть **вероятность**.

> 📌 **Запомни:** То число, к которому стремится частота при большом числе повторений, — это **вероятность** события. Для «орла» она равна 0,5, для грани кубика — $\approx 0{,}167$. (Подробно — в Главе 5.)

⏱ **Попробуй сам.** Прикинь: если бросить честный кубик 300 раз, сколько примерно раз выпадет «двойка»? (Подсказка: раздели 300 на 6.)

✍️ Разбор примеров

Пример 1. Лучшая оценка по измерениям

Длину карандаша измерили 5 раз (мм): 173, 175, 174, 173, 175. Какова наилучшая оценка длины?

Решение. Берём среднее: $(173+175+174+173+175)/5 = 870/5 = 174$. **Ответ:** ≈ 174 мм.

Пример 2. Ожидаемое число выпадений

Сколько раз примерно выпадет «орёл», если бросить честную монету 200 раз?

Решение. Доля «орлов» при многих бросках ≈ 0,5. Значит, около $200 \times 0{,}5 = 100$ раз. **Ответ:** примерно 100 раз.

Пример 3. Ожидаемая частота для кубика

Кубик бросают 600 раз. Сколько примерно раз выпадет грань «4»?

Решение. У честного кубика каждая грань ожидается с долей $1/6$. Значит, $600 \times \dfrac{1}{6} = 100$ раз. **Ответ:** примерно 100 раз.

Пример 4. Где частота надёжнее?

Доля «орлов» оказалась 0,48 после 1000 бросков и 0,40 после 5 бросков. Какой результат ближе к истинной вероятности 0,5 и почему?

Решение. 0,48 — после 1000 бросков. Чем больше повторений, тем устойчивее частота и тем ближе она к вероятности. После 5 бросков доля скачет сильно и ненадёжна. **Ответ:** 0,48 (после 1000 бросков) — ближе и надёжнее.

Пример 5. Объясняем разброс измерений

Школьник трижды измерил температуру воды термометром: 21,0 °C; 20,8 °C; 21,1 °C. Почему числа разные и какова лучшая оценка?

Решение. Разница — из-за погрешности измерения (как держал термометр, точность шкалы, момент снятия показаний). Лучшая оценка — среднее:

$(21{,}0+20{,}8+21{,}1)/3 = 62{,}9/3 \approx 20{,}97 \approx 21{,}0$ °C. **Ответ:** разброс из-за погрешности; оценка ≈ 21,0 °C.

Пример 6. Когда монета подозрительна?

Монету бросили 1000 раз, «орёл» выпал 720 раз. Честная ли монета?

Решение. У честной монеты при 1000 бросках доля «орлов» должна быть около 0,5 (примерно 500 раз). 720 — это доля 0,72, очень далеко от 0,5, и при таком большом числе бросков случайностью это не объяснить. **Ответ:** скорее всего, монета нечестная (перекошена в сторону «орла»).

💡 Запомни главное

- Случайная изменчивость есть всюду: в **измерениях** (погрешность), в **росте людей** (горка с пиком в середине), в **бросках** монеты и кубика.
- **Среднее многих измерений** — лучшая оценка истинной величины (случайные ошибки гасятся).
- **Устойчивость частот:** при большом числе повторений относительная частота почти не меняется и приближается к определённому числу.
- Это число — **вероятность** события (для «орла» 0,5, для грани кубика ≈ 0,167). На малом числе повторений судить о ней нельзя.

📝 Домашнее задание

1. Массу яблока взвесили 4 раза (г): 151, 153, 152, 152. Найди наилучшую оценку массы.
2. Сколько примерно раз выпадет «решка» при 400 бросках честной монеты?
3. Кубик бросают 300 раз. Сколько примерно раз выпадет грань «6»?
4. Объясни, почему доля «орлов» при 10 бросках может быть 0,3, а при 1000 бросках — обычно около 0,5.

5. Доля «орлов» получилась 0,55 (после 20 бросков) и 0,505 (после 2000 бросков). Какой результат надёжнее и почему?
6. Кубик бросили 60 раз, грань «1» выпала 25 раз. Похоже ли это на честный кубик? Объясни.
7. Назови два примера величин из жизни, которые при измерении дают «горку» (много значений в середине, мало по краям).
8. ⭐ Проведи опыт: брось монету 30 раз, записывая после каждых 10 бросков долю «орлов» (по 10, по 20, по 30 суммарно). Запиши три доли и опиши, приближаются ли они к 0,5. Объясни, почему 30 бросков — это ещё мало для надёжного вывода.