

Урок 17. Степень вершины


Вероятность и статистика, 7 класс · Введение в теорию графов · ~45 минут

Что ты узнаешь

- Что такое степень вершины и как её сосчитать
- Почему сумма степеней всех вершин всегда равна удвоенному числу рёбер
- Почему вершин с нечётной степенью всегда чётное количество
- Как красиво решать задачи про рукопожатия с помощью этого знания

Разбираемся в теме

Вернёмся к графу дружбы. У каждого человека есть какое-то число друзей: у кого-то трое, у кого-то один, а у кого-то ноль. В мире графов «число друзей» вершины называют красиво — **степень вершины**.

 **Запомни: Степень вершины** — это число рёбер, которые из неё выходят. Степень вершины A обозначают так: $\deg(A)$ (от английского degree — степень).

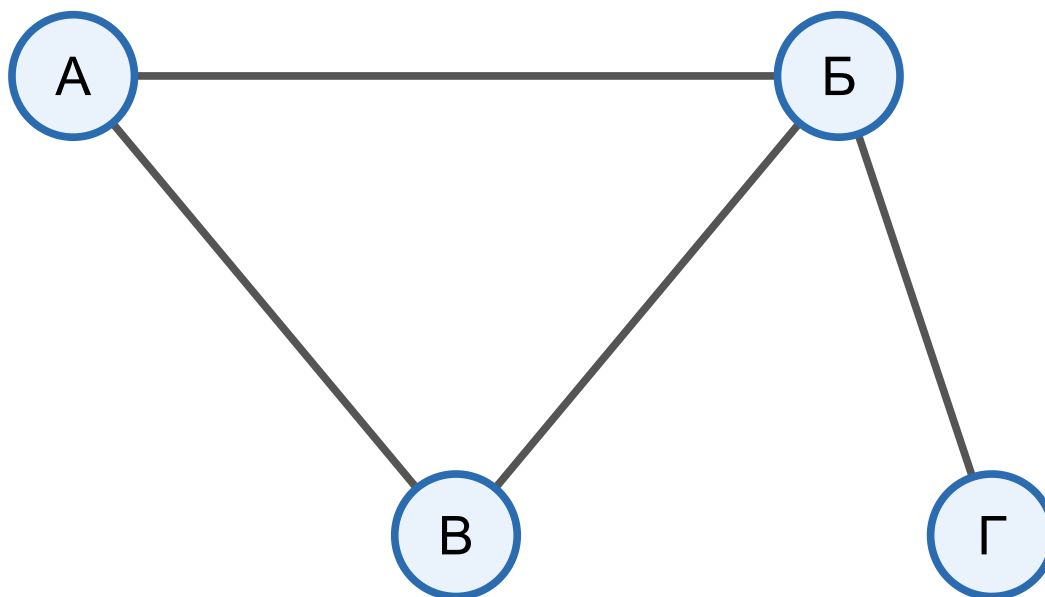




Рис. 1. Считаем степени вершин

Сосчитаем степени на рисунке 1:

- $\text{deg}(A) = 2$ (рёбра к Б и В)
- $\text{deg}(Б) = 3$ (рёбра к А, В и Г)
- $\text{deg}(В) = 2$ (рёбра к А и Б)
- $\text{deg}(Г) = 1$ (ребро к Б)


 **Лайфхак:** Чтобы найти степень вершины, просто приложи палец к точке и сосчитай, сколько линий из-под пальца торчит. Не считай вершины-соседей — считай именно **линии!**

 **Попробуй сам:** На рисунке 1 сложи все четыре степени: $2 + 3 + 2 + 1$. Что получилось? Запомни число, оно нам сейчас пригодится.


Главная теорема: лемма о рукопожатиях

Ты только что сложил степени: $2 + 3 + 2 + 1 = 8$. А теперь сосчитай рёбра на рисунке 1: А–Б, А–В, Б–В, Б–Г — это 4 ребра. Заметил? 8 — это ровно в два раза больше, чем 4.

Это не случайность!


 **Запомни:** Сумма степеней всех вершин = $2 \times$ (число рёбер). Это правило называют **леммой о рукопожатиях**.

Почему так? Подумай про одно-единственное ребро. Оно соединяет две вершины, и каждой из них прибавляет по +1 к степени. То есть **каждое ребро добавляет к общей сумме степеней ровно 2**. Поэтому, сколько бы рёбер ни было, сумма степеней всегда вдвое больше их числа.

 **А знаешь ли ты?** Название «лемма о рукопожатиях» придумали так: представь вечеринку, где люди жмут друг другу руки. Каждое рукопожатие — это «ребро» между двумя людьми. Если каждый посчитает, скольким он пожал руку (свою степень), и все сложат — получится ровно в два раза больше, чем было рукопожатий. Ведь в каждом рукопожатии участвуют двое!


Следствие: нечётных вершин — чётное число


Из леммы вытекает удивительный факт.

 **Запомни:** В любом графе **число вершин с нечётной степенью всегда чётно** (то есть их 0, 2, 4, 6...). Не может быть, например, ровно трёх вершин нечётной степени.

Почему? Сумма всех степеней равна $2 \times$ (число рёбер) — а это всегда **чётное** число. Вершины с чётной степенью в сумму дают чётный вклад. Значит, и оставшиеся, нечётные, вершины тоже должны в сумме давать чётное число. А

сумма нечётных чисел чётна, только если этих чисел чётное количество. Вот и весь секрет.

 **Частая ошибка:** Не путай «чётную степень» и «чётное число вершин». Речь идёт о том, что **количество** вершин-нечётностей чётно. Сами степени у них при этом нечётные (1, 3, 5...).

 **Попробуй сам:** Может ли в компании быть так, что у каждого из 5 человек ровно 3 друга (внутри этой компании)? Подсказка: это значит 5 вершин степени 3 — а 5 нечётных вершин быть не может!

Разбор примеров

Пример 1. В графе на рисунке ниже найди степень каждой вершины и проверь лемму о рукопожатиях.

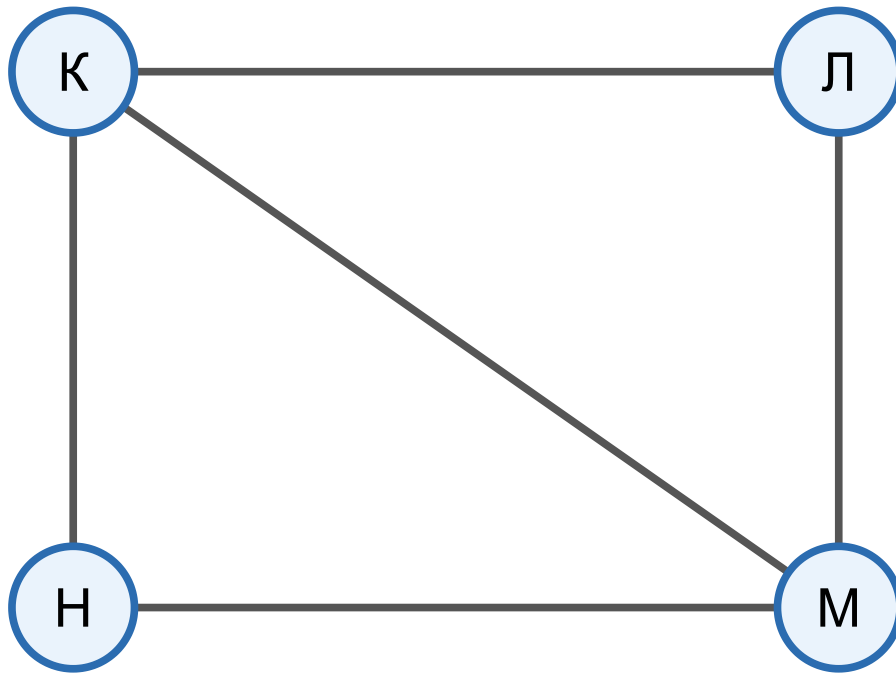


Рис. 2. Граф из четырёх вершин с диагональю К–М

Решение. Рёбра: К–Л, К–Н, Л–М, Н–М, К–М. Считаем степени:

- $\text{deg}(К) = 3$ (Л, Н, М)
- $\text{deg}(Л) = 2$ (К, М)
- $\text{deg}(М) = 3$ (Л, Н, К)
- $\text{deg}(Н) = 2$ (К, М)

Сумма степеней: $3 + 2 + 3 + 2 = 10$. Число рёбер: 5. Проверка: $2 \times 5 = 10$. ✓

Ответ: степени 3, 2, 3, 2; сумма $10 = 2 \times 5$ рёбер.

Пример 2. В графе 6 рёбер. Чему равна сумма степеней всех вершин?

Решение. По лемме: сумма степеней = $2 \times$ число рёбер = $2 \times 6 = 12$.

Ответ: 12.

Пример 3. В графе сумма степеней вершин равна 14. Сколько в нём рёбер?

Решение. Сумма = 2 × рёбра, значит рёбра = $14 \div 2 = 7$.

Ответ: 7 рёбер.

Пример 4. Может ли существовать граф со степенями вершин 1, 2, 2, 3?

Решение. Считаем число вершин нечётной степени: степень 1 (нечётная) и степень 3 (нечётная) — итого **2** вершины. Два — это чётное число, значит всё в порядке. Заодно проверим сумму: $1 + 2 + 2 + 3 = 8$, делится на 2, рёбер было бы 4. Такой граф возможен.

Ответ: да, может (нечётных вершин 2 — чётное число).

Пример 5. Может ли быть граф со степенями вершин 1, 3, 3?

Решение. Вершины нечётной степени: 1, 3, 3 — все три нечётные. Значит, нечётных вершин **3**, а это нечётное число. Такого быть не может!

Ответ: нет, не может (нечётных вершин получилось бы 3).

Пример 6. На встрече 7 человек, и кто-то предложил, чтобы каждый пожал руку ровно троим. Возможно ли это?

Решение. Это граф из 7 вершин, у каждой степень 3. Тогда нечётных вершин — все 7 штук, а 7 — нечётное число. Невозможно!

Ответ: нет, нельзя устроить так, чтобы каждый из 7 пожал руку ровно троим.



Запомни главное

- **Степень вершины** — число рёбер, выходящих из неё (deg).
- **Сумма степеней всех вершин = 2 × (число рёбер)** — лемма о рукопожатиях.
- Каждое ребро добавляет к сумме степеней ровно **2**.
- **Число вершин нечётной степени всегда чётно** (0, 2, 4, ...).
- Если степеней нечётное число «нечётных» — такого графа не существует.



Домашнее задание

1. Найди степень каждой вершины на рисунке 2 ещё раз, не подглядывая в решение, и сложи их.
2. В графе 9 рёбер. Чему равна сумма степеней всех вершин?
3. Сумма степеней вершин графа равна 20. Сколько в нём рёбер?
4. Может ли существовать граф со степенями вершин 2, 2, 2, 2? Если да — нарисуй его.
5. Может ли существовать граф со степенями вершин 1, 1, 1? Объясни.
6. В классе 25 учеников. Может ли быть так, что у каждого ровно 5 друзей внутри класса? Объясни через нечётные вершины.
7. Нарисуй граф из 5 вершин, у которого степени 2, 2, 2, 2, 4. Проверь лемму о рукопожатиях.
8. ★ В графе 5 вершин. Известны степени четырёх из них: 1, 3, 2, 2. Чему может быть равна степень пятой вершины, если всего в графе 5 рёбер? Найди её двумя способами: через лемму о рукопожатиях и через правило о чётности нечётных вершин.