

Урок 20. Применение графов


Вероятность и статистика, 7 класс · Введение в теорию графов · ~45 минут

Что ты узнаешь

- Как граф помогает разобраться в схемах дорог и метро
- Как находить и считать маршруты между двумя точками
- Как с помощью дерева вариантов подсчитывать число возможностей
- Как вообще «перевести» задачу из жизни на язык графа и решить её

Разбираемся в теме

За прошлые уроки ты собрал целый набор инструментов: вершины, рёбра, степени, пути, циклы, деревья. Пора пустить их в дело! Графы — это не просто кружочки на бумаге, это способ **решать настоящие задачи**: проложить маршрут, посчитать варианты, разобраться в запутанной схеме.

 **Запомни:** Главный приём — **перевести задачу на язык графа**. Спроси себя: что здесь вершины? Что здесь рёбра? Как только ответил — задача обычно становится в разы понятнее.

Схемы дорог и метро

Карта метро — это граф в чистом виде. Станции — вершины, перегоны — рёбра. Пересадочная станция — это вершина с высокой степенью (из неё выходит много линий).

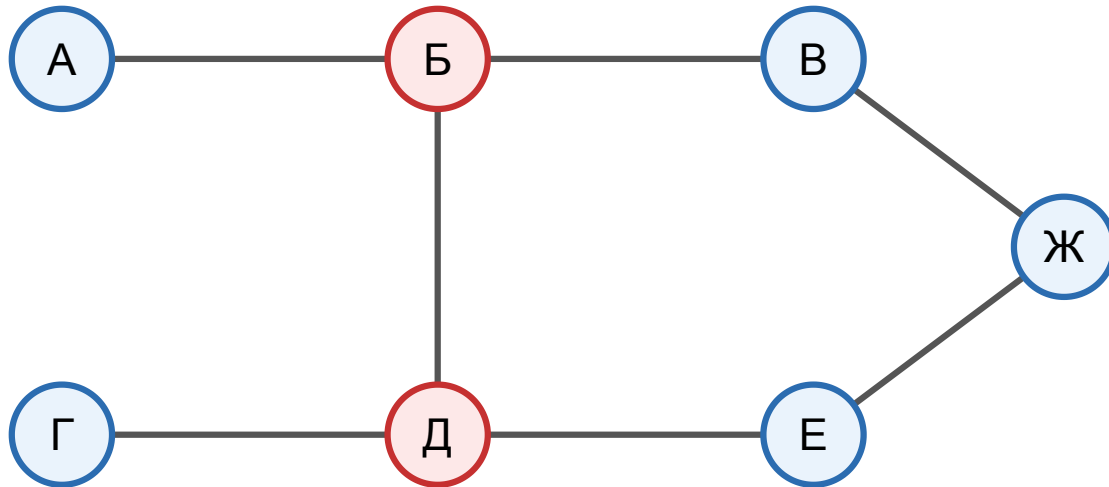


Рис. 1. Схема метро: Б и Д (красные) — пересадочные станции

Красные станции Б и Д — пересадочные: у них самые большие степени, через них проходит больше всего маршрутов.

💡 **Лайфхак:** Если в задаче спрашивают «можно ли доехать с одной станции на другую» — это вопрос про **связность**. Если «по скольким перегонам ехать» — считай рёбра в пути. Если «сколько разных маршрутов» — аккуратно перебери все пути.

Подсчёт маршрутов

Часто спрашивают: сколькими способами можно добраться из точки А в точку Б? Тут помогает аккуратный перебор путей. Главное — двигаться по системе, чтобы не пропустить и не повторить.

⚠️ **Частая ошибка:** Считать маршруты «на глаз» и сбиться. Лучше выписывай пути по очереди: сначала все, что идут через одну вершину,

потом через другую. Так ничего не потеряется.

🕒 **Попробуй сам:** На рисунке 1 найди два разных маршрута от А до В. Какой из них короче (меньше перегонов)?

Дерево возможных вариантов — для подсчёта

Это, пожалуй, самое мощное применение графов в нашем предмете. Когда нужно сосчитать, сколько всего вариантов чего-то, рисуют **дерево вариантов**: каждый уровень — это один выбор, каждая ветка — один из его исходов.

🤔 **А знаешь ли ты?** Если на каждом шаге одинаковое число вариантов, их можно просто перемножить. Два броска монетки: $2 \times 2 = 4$. Три блюда по 2 варианта: $2 \times 2 \times 2 = 8$. Дерево как раз показывает, *почему* варианты перемножаются — каждая ветка делится ещё на столько же.

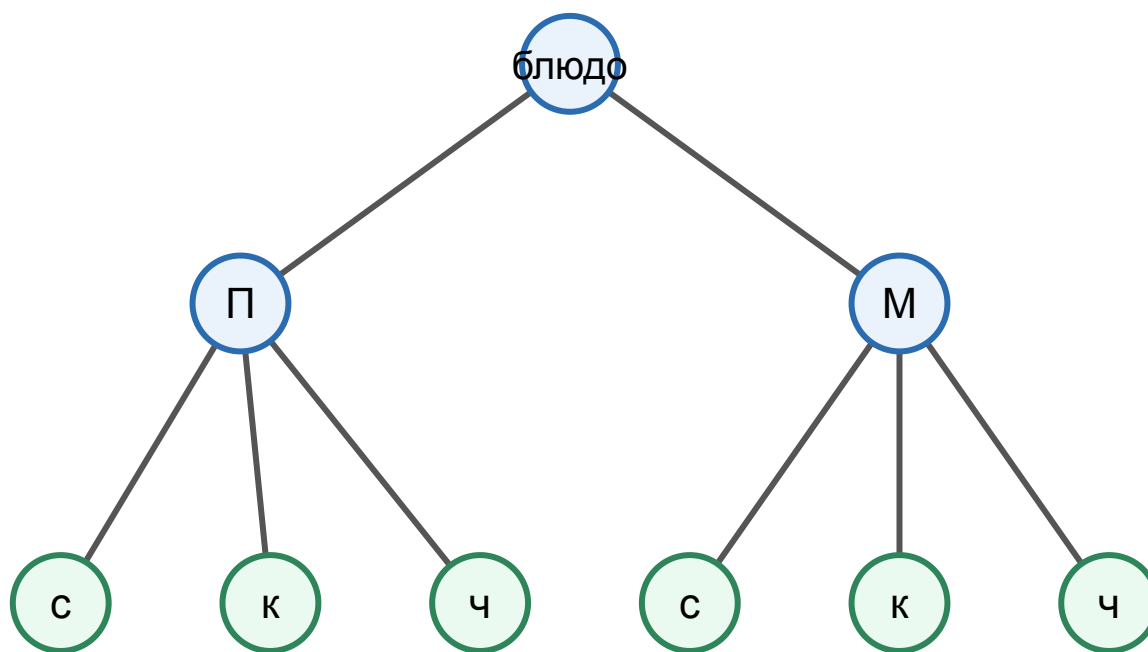


Рис. 2. Дерево: блюдо (П — пицца, М — макароны) и напиток (с — сок, к — компот, ч — чай). Всего $2 \times 3 = 6$ вариантов

Универсальный план решения задачи через граф

1. **Определи вершины** — что за объекты (города, люди, выборы).
2. **Определи рёбра** — какие связи между ними.
3. **Нарисуй граф** аккуратно.
4. **Переформулируй вопрос** на языке графа (связность? путь? степень? число листьев дерева?).
5. **Реши и переведи ответ** обратно на «человеческий».



Разбор примеров

Пример 1. На рисунке 1 можно ли доехать с станции А на станцию Ж? Если да — назови маршрут.

Решение. Это вопрос про связность. Ведём путь: $A \rightarrow B \rightarrow V \rightarrow Ж$. Все рёбра существуют. Доехать можно.

Ответ: да, например $A \rightarrow B \rightarrow V \rightarrow Ж$.

Пример 2. На рисунке 1 найди самый короткий маршрут от Г до Ж (по числу перегонов).

Решение. Г соединена с Д. Дальше из Д: к Б, к Е, к Ж. Идём $Г \rightarrow Д \rightarrow Е \rightarrow Ж$ — это 3 перегона. Проверим, нет ли короче: любой путь от Г сначала обязан пройти через Д (других рёбер у Г нет), а от Д до Ж минимум 2 перегона (через Е или через $Б \rightarrow В$). Значит, 3 перегона — минимум.

Ответ: $Г \rightarrow Д \rightarrow Е \rightarrow Ж$, 3 перегона.

Пример 3. Сколько разных маршрутов от А до Д на рисунке 1, если не проходить через одну вершину дважды?

Решение. Из А единственное ребро — в Б. Из Б идём либо в В, либо в Д.

- $A \rightarrow B \rightarrow Д$ — маршрут 1.
- $A \rightarrow B \rightarrow В \rightarrow Ж \rightarrow Е \rightarrow Д$ — маршрут 2. Других вариантов, не повторяя вершины, нет.

Ответ: 2 маршрута.

Пример 4. В магазине футболки трёх цветов (красная, синяя, белая) и двух размеров (M, L). Сколькими способами можно выбрать одну футболку? Построй дерево вариантов.

Решение. Первый уровень — цвет (3 ветки), от каждого — размер (по 2 ветки). Всего на концах $3 \times 2 = 6$.

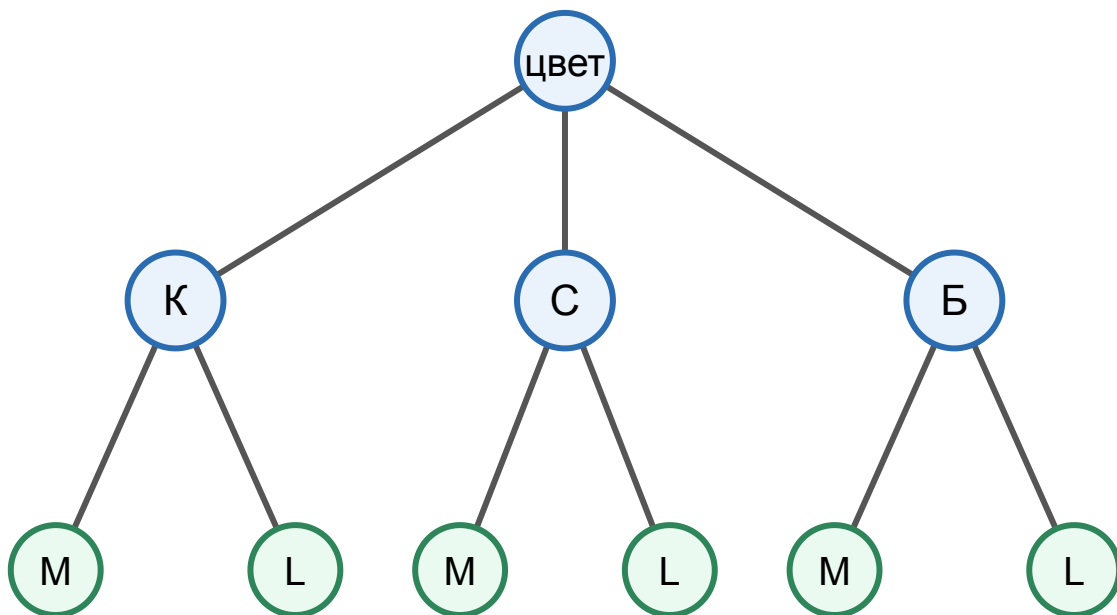


Рис. 3. Дерево вариантов футболки: 3 цвета \times 2 размера = 6 способов

Ответ: 6 способов.

Пример 5. Пять городов нужно соединить дорогами так, чтобы из любого можно было доехать в любой, а дорог построить как можно меньше. Сколько дорог понадобится? Какой это граф?

Решение. «Из любого в любой» = связный. «Как можно меньше рёбер» при связности = дерево. У дерева из 5 вершин ровно $5 - 1 = 4$ ребра.

Ответ: 4 дороги; получится дерево.

Пример 6. Маршрутка едет по кольцу через остановки 1–2–3–4–5–1. Является ли эта схема деревом? Сколько в ней рёбер?

Решение. Это кольцо — значит, есть цикл, а в дереве циклов быть не может. Деревом не является. Рёбер 5 (1–2, 2–3, 3–4, 4–5, 5–1), как и вершин, — а у дерева их было бы на одно меньше.

Ответ: нет, не дерево (это цикл); рёбер 5.



Запомни главное

- Чтобы решить задачу графом: найди **вершины**, найди **рёбра**, нарисуй, переформулируй вопрос.
- «Можно ли добраться» = вопрос про **связность**.
- «Сколько перегонов / какой короче» = считай рёбра в **пути**.
- «Сколько вариантов» = строй **дерево вариантов**; число исходов — это листья на концах веток.
- Если на каждом шаге одинаковое число выборов — варианты **перемножаются**.



Домашнее задание

1. На рисунке 1 назови маршрут от Г до В. Сколько в нём перегонов?
2. На рисунке 1 какая вершина имеет наибольшую степень? Что это значит для пассажира?
3. Можно ли на рисунке 1 доехать от А до Е? Назови маршрут.
4. В кафе 2 вида пиццы и 4 вида напитков. Построй дерево вариантов и сосчитай, сколько разных «пицца + напиток» можно заказать.
5. Шесть посёлков надо соединить дорогами так, чтобы между любыми двумя был путь, а дорог было минимум. Сколько дорог нужно? Как называется такой граф?

6. На завтрак выбирают кашу (овсяная или рисовая), к ней добавку (мёд, варенье или орехи) и напиток (чай или какао). Сколько разных завтраков? Можно решить умножением и проверить деревом.
7. Нарисуй схему из 4 станций, где есть ровно один цикл. Является ли она деревом?
8. ★ От дома (Д) до школы (Ш) ведёт схема дорог: Д–А, Д–Б, А–В, Б–В, В–Ш. Нарисуй граф и найди все маршруты от Д до Ш, не проходящие ни через одну вершину дважды. Сколько их? Какой самый короткий?