

Урок 6. Смежные и вертикальные углы

Геометрия, 7 класс · Гл. I, §5 · ~45 минут

Что ты узнаешь


- Что такое **смежные углы** и почему их сумма всегда 180° .
- Что такое **вертикальные углы** и почему они равны (с настоящим доказательством!).
- Как по одному известному углу мгновенно находить ещё три.
- Где этот фокус прячется в задачах на пересекающиеся прямые.

Разбираемся в теме

Возьми ножницы и чуть раскрой их. В точке, где скреплены лезвия, появилось четыре угла. Два из них «смотрят» друг на друга, два — прижаты с боков. Геометрия знает про каждый из них кое-что интересное. Поехали.

Смежные углы

Представь развёрнутый угол (помнишь, прямую с точкой?), и из этой точки вверх торчит луч. Он разбил прямую на два угла. Вот эти два соседа и называются смежными.

 **Определение:** Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие стороны являются продолжениями одна другой (то есть образуют прямую).

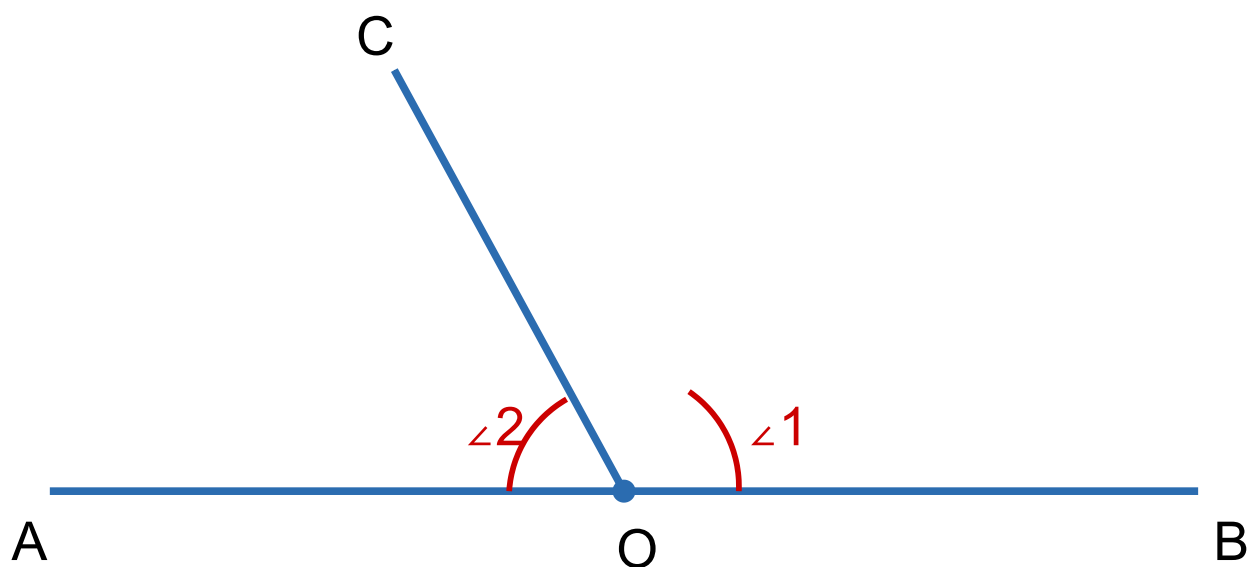




Рис. 1. Углы 1 ($\angle COB$) и 2 ($\angle AOC$) — смежные: вместе они дают развёрнутый угол AOB

Заметил? Два смежных угла вместе как раз заполняют развёрнутый угол. А развёрнутый — это 180° . Отсюда теорема.

 **Теорема:** Сумма смежных углов равна 180° .

Почему? Потому что луч OC делит развёрнутый угол AOB на части, а по свойству меры угла части в сумме дают целое: $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180^\circ$.

 **Лайфхак:** Знаешь один смежный угол — второй находишь вычитанием из 180° . Если $\angle 1 = 110^\circ$, то $\angle 2 = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. Всё.

 **Начерти сам:** проведи прямую, поставь точку и пусти из неё луч под любым углом. Измерь оба получившихся угла транспортиром. Сложи — должно выйти 180° (\pm погрешность измерения).

⚠ Частая ошибка: не всякие два соседних угла — смежные! Нужно, чтобы внешние стороны лежали на **одной прямой**. Если они образуют не прямую, а просто разные направления — это не смежные углы, и про 180° речи нет.

Вертикальные углы

А теперь скрести две прямые в одной точке. Получится четыре угла. Пары углов, лежащих «крест-накрест» (друг напротив друга), называются вертикальными.

📐 Определение: Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

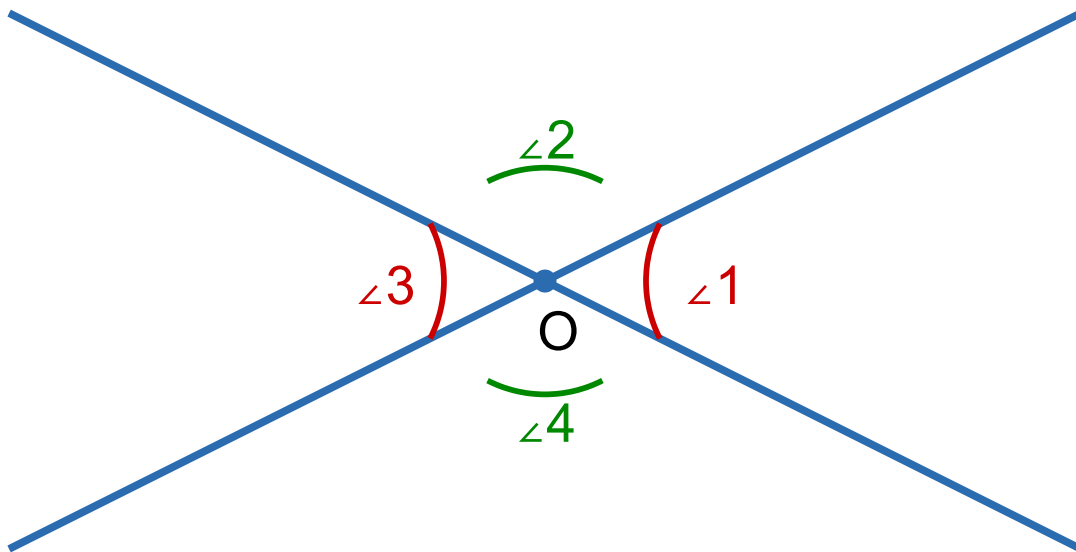


Рис. 2. Прямые пересеклись в точке O . $\angle 1$ и $\angle 3$ — вертикальные; $\angle 2$ и $\angle 4$ — тоже вертикальные


📌 Теорема: Вертикальные углы равны.


Звучит почти волшебно, но докажем это честно — простым языком.

Доказательство (почему $\angle 1 = \angle 3$).

1. Посмотри на $\angle 1$ и $\angle 2$ — они смежные (внешние стороны лежат на одной прямой). Значит, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.
2. Теперь на $\angle 2$ и $\angle 3$ — они тоже смежные. Значит, $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.
3. В обоих равенствах справа стоит 180° , значит левые части равны между собой: $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3$.
4. Уберём из обеих частей одинаковое слагаемое $\angle 2$. Останется: $\angle 1 = \angle 3$.

Что и требовалось доказать! Точно так же доказывается, что $\angle 2 = \angle 4$. Хитрость в том, что у обоих углов есть общий «сосед» $\angle 2$, и через него они «дотягиваются» друг до друга.

 **Лайфхак:** При пересечении двух прямых хватает ОДНОГО известного угла, чтобы узнать все четыре. Допустим, $\angle 1 = 70^\circ$. Тогда вертикальный $\angle 3 = 70^\circ$, а смежные $\angle 2 = \angle 4 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

 **А знаешь ли ты?** Слово «вертикальные» здесь не про «вертикаль» (направление вверх). Оно от латинского *vertex* — «вершина», «макушка». То есть углы «при общей вершине». Так что вертикальный угол может спокойно лежать горизонтально — название не врёт, просто говорит о другом.

Разбор задач

Задача 1. Дано: один из смежных углов равен 47° . **Найти:** второй смежный угол.

Решение.

1. Сумма смежных углов = 180° .
2. Значит, второй угол = $180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$.

Ответ: 133° .

Задача 2. Дано: один из смежных углов на 40° больше другого. **Найти:** оба угла.

Решение.

1. Пусть меньший угол = x° . Тогда больший = $x^\circ + 40^\circ$.

2. Их сумма равна 180° : $x^\circ + (x^\circ + 40^\circ) = 180^\circ$.

3. $2x^\circ + 40^\circ = 180^\circ$, значит $2x^\circ = 140^\circ$, $x^\circ = 70^\circ$.

4. Меньший = 70° , больший = $70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$.

5. Проверка: $70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$ — верно.

Ответ: 70° и 110° .

Задача 3. Дано: два смежных угла относятся как 4 : 5. **Найти:** эти углы.

Решение.

1. Пусть одна «часть» равна x° . Тогда углы равны $4x^\circ$ и $5x^\circ$.

2. Сумма смежных = 180° : $4x^\circ + 5x^\circ = 180^\circ$, то есть $9x^\circ = 180^\circ$.

3. Отсюда $x^\circ = 20^\circ$.

4. Углы: $4 \cdot 20^\circ = 80^\circ$ и $5 \cdot 20^\circ = 100^\circ$.

Ответ: 80° и 100° .

Задача 4. Дано: прямые AB и CD пересекаются в точке O. $\angle AOC = 65^\circ$. **Найти:** $\angle BOD$, $\angle AOD$, $\angle BOC$.

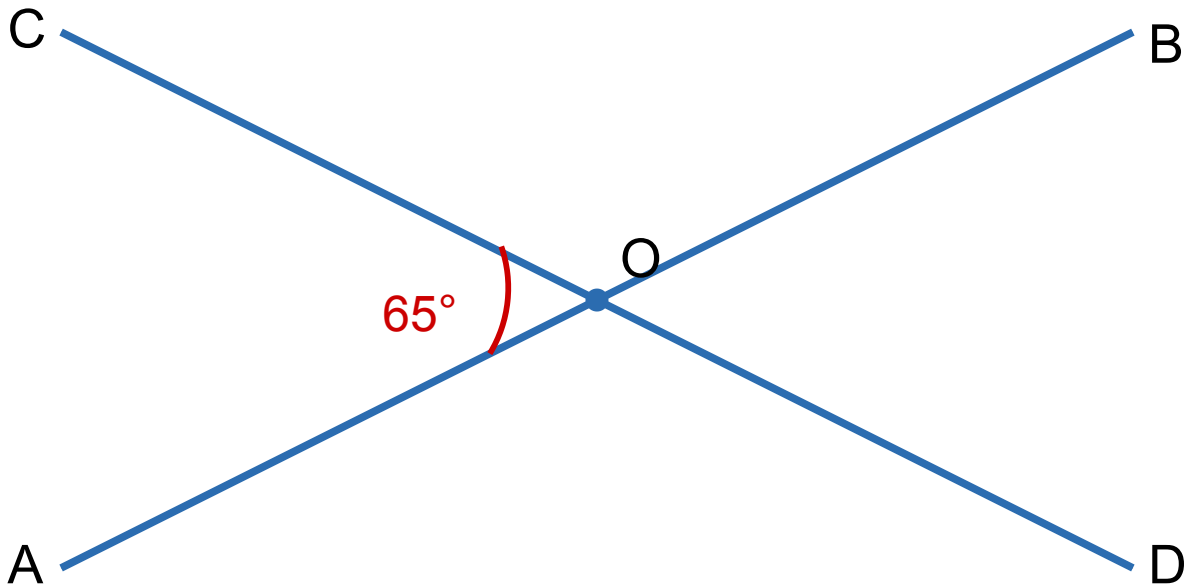


Рис. 3. Пересечение прямых AB и CD, дан угол AOC

Решение.

1. $\angle BOD$ — вертикальный к $\angle AOC$, значит $\angle BOD = \angle AOC = 65^\circ$.
2. $\angle AOD$ смежный с $\angle AOC$, значит $\angle AOD = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.
3. $\angle BOC$ вертикальный к $\angle AOD$ (или смежный с $\angle AOC$), значит $\angle BOC = 115^\circ$.

Ответ: $\angle BOD = 65^\circ$, $\angle AOD = 115^\circ$, $\angle BOC = 115^\circ$.

Задача 5. Дано: при пересечении двух прямых один из четырёх углов равен 90° .

Доказать: все четыре угла равны 90° .

Решение.

1. Пусть $\angle 1 = 90^\circ$.
2. Смежный с ним $\angle 2 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
3. Вертикальный к $\angle 1$ угол $\angle 3 = \angle 1 = 90^\circ$.
4. Вертикальный к $\angle 2$ угол $\angle 4 = \angle 2 = 90^\circ$.

5. Значит, все четыре угла по 90° .

Ответ: доказано: если один угол прямой, то и остальные три прямые (прямые перпендикулярны — но об этом в следующем уроке!).

Задача 6. Дано: прямые пересекаются; сумма двух из четырёх углов, НЕ являющихся вертикальными, равна 180° всегда. А сумма $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 3$ (вертикальных) равна 130° . **Найти:** каждый из этих двух углов и смежные с ними.

Решение.

1. $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 3$ вертикальные, значит они равны: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$.
2. Их сумма 130° , значит каждый $= 130^\circ : 2 = 65^\circ$.
3. Смежный с $\sphericalangle 1$ угол $= 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$. Второй такой же угол тоже 115° (он ему вертикальный).

Ответ: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 = 65^\circ$; два других угла по 115° .



Запомни главное

- **Смежные углы:** общая сторона + внешние стороны на одной прямой. Их сумма = 180° .
- **Вертикальные углы:** «крест-накрест» при пересечении прямых. Они **равны**.
- Доказательство равенства вертикальных углов держится на смежных: оба «упираются» в один и тот же 180° .
- При пересечении двух прямых одного известного угла хватает, чтобы найти все четыре.
- Если один из четырёх углов 90° — то и все 90° .



Домашнее задание

1. Один смежный угол равен 38° . Найди второй.
2. Один смежный угол равен 112° . Найди второй.

3. Два смежных угла равны между собой. Чему равен каждый?
4. Смежные углы относятся как 2 : 7. Найди их.
5. Один смежный угол в 4 раза больше другого. Найди оба.
6. Прямые пересекаются. Один из углов равен 53° . Найди остальные три.
7. Прямые пересекаются. Сумма двух вертикальных углов равна 86° . Найди все четыре угла.
8. Начерти две пересекающиеся прямые, измерь все четыре угла транспортиром и проверь: вертикальные равны, смежные дают 180° .
9. ☆ Из вершины развёрнутого угла проведены два луча по одну сторону так, что они образуют между собой угол 50° , а крайние углы равны между собой. Найди все три угла.