

Урок 8. Треугольник; первый признак равенства треугольников

Геометрия, 7 класс · Гл. II, §1 · ~45 минут

Что ты узнаешь


- Что такое треугольник и из чего он состоит.
- Что значит «два треугольника равны» и какие элементы называют соответственными.
- Сформулируешь и поймёшь **первый признак равенства треугольников** (по двум сторонам и углу между ними).
- Научишься доказывать равенство треугольников и сразу делать из этого выводы о сторонах и углах.

Разбираемся в теме

Представь, что у тебя есть две одинаковые наклейки-треугольнички. Если одну положить на другую — они совпадут полностью, без зазоров и нахлёстов. Вот это и есть главная идея урока: **равные фигуры — те, что совмещаются наложением**. А весь фокус геометрии в том, чтобы доказывать такое совмещение, *не вырезая ничего ножницами*.

Что такое треугольник

Начнём с самого героя главы.

 **Определение:** Треугольник — это геометрическая фигура из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки.

Точки — это **вершины**, отрезки — **стороны**. Ещё у треугольника три **угла**. Итого у каждого треугольника по три «детали» каждого вида: 3 вершины, 3 стороны, 3 угла. Запомни число 3 — оно тут повсюду.

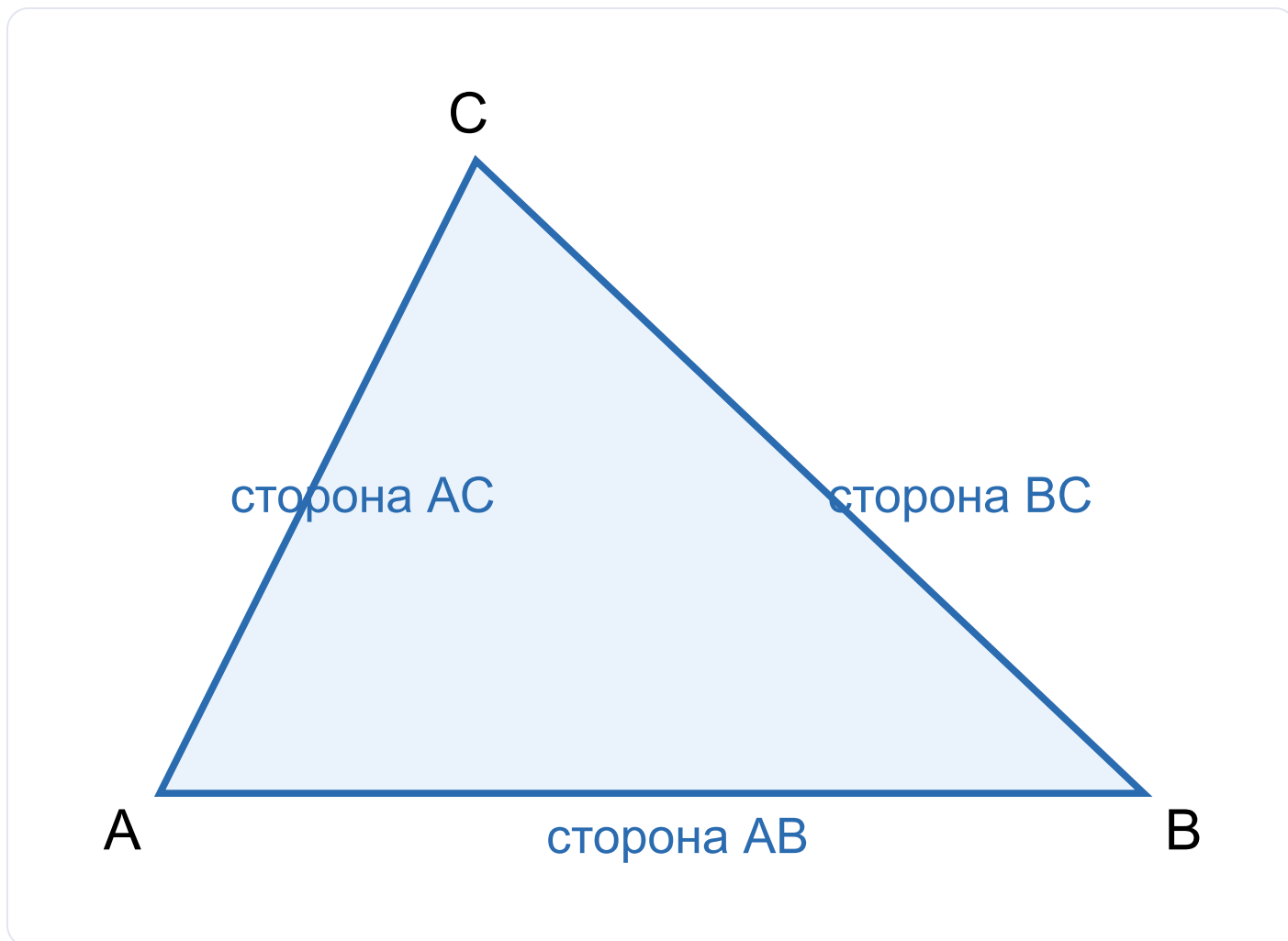


Рис. 1. Треугольник ABC: вершины A, B, C и три стороны

Такой треугольник обозначают так: $\triangle ABC$. Порядок букв можно менять ($\triangle BCA$, $\triangle CAB$ — это всё он же), но обычно его выбирают не просто так — об этом ниже.

💡 Лайфхак: Сторону называют по двум вершинам, которые она соединяет (AB, BC, AC). А угол — по трём буквам, где средняя — это вершина угла: $\angle ABC$ (вершина B). Или коротко: $\angle B$.

Когда треугольники равны

▢ **Определение:** Два треугольника называются **равными**, если их можно совместить наложением.

Когда мы накладываем один треугольник на другой и они совпадают, то совпадают и их вершины — попарно. Вершины, которые легли друг на друга, называют **соответственными**. И вот ключевая мысль:

В равных треугольниках **против соответственных (равных) сторон лежат равные углы**, и наоборот. Стороны и углы, которые совмещаются, называют **соответственными элементами**.

⚠ **Частая ошибка:** Когда пишешь $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, буквы должны стоять **в порядке соответствия!** Это значит $A \leftrightarrow A_1$, $B \leftrightarrow B_1$, $C \leftrightarrow C_1$. Тогда сразу читаются равенства: $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ и так далее. Перепутаешь порядок — получишь неверные выводы.

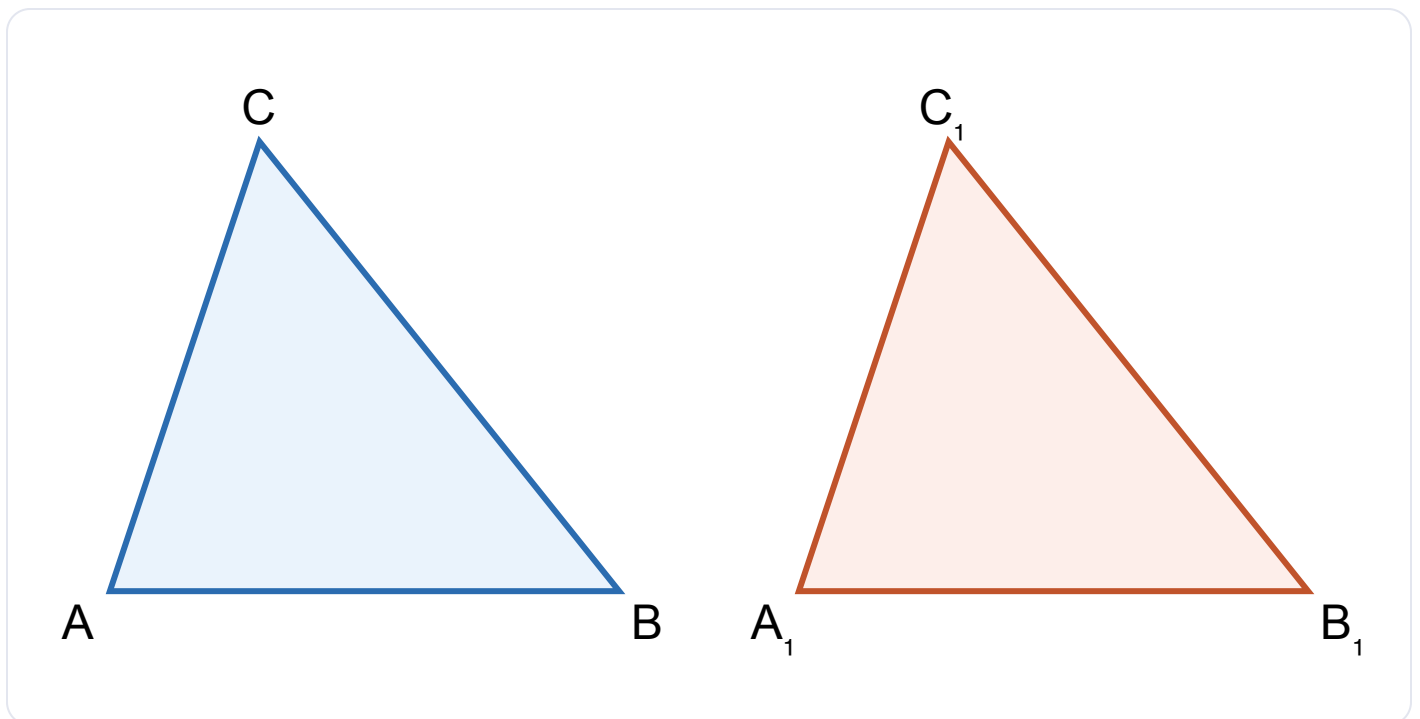


Рис. 2. Равные треугольники: $A \leftrightarrow A_1$, $B \leftrightarrow B_1$, $C \leftrightarrow C_1$

🤔 **А знаешь ли ты?** Слово «конгруэнтные» (так в некоторых странах называют равные фигуры) идёт от латинского *congruere* — «совпадать, сходиться». То есть равные треугольники — это буквально «сходящиеся друг с другом».

Главный вопрос урока

Накладывать треугольники друг на друга — это, конечно, красиво, но неудобно: фигуры нарисованы на бумаге, ничего не вырежешь. Хочется уметь говорить «они равны», **глядя только на несколько чисел** — длины сторон и величины углов. Сколько таких чисел достаточно?

Оказывается, не нужно проверять все шесть элементов (3 стороны + 3 угла). Хватает всего **трёх**, выбранных с умом. Первый такой набор — две стороны и угол между ними.

🔪 **Теорема (первый признак равенства треугольников):** Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Обрати внимание на слова «угол **между ними**». Это важно: угол должен лежать именно между теми двумя сторонами, а не где-то сбоку.

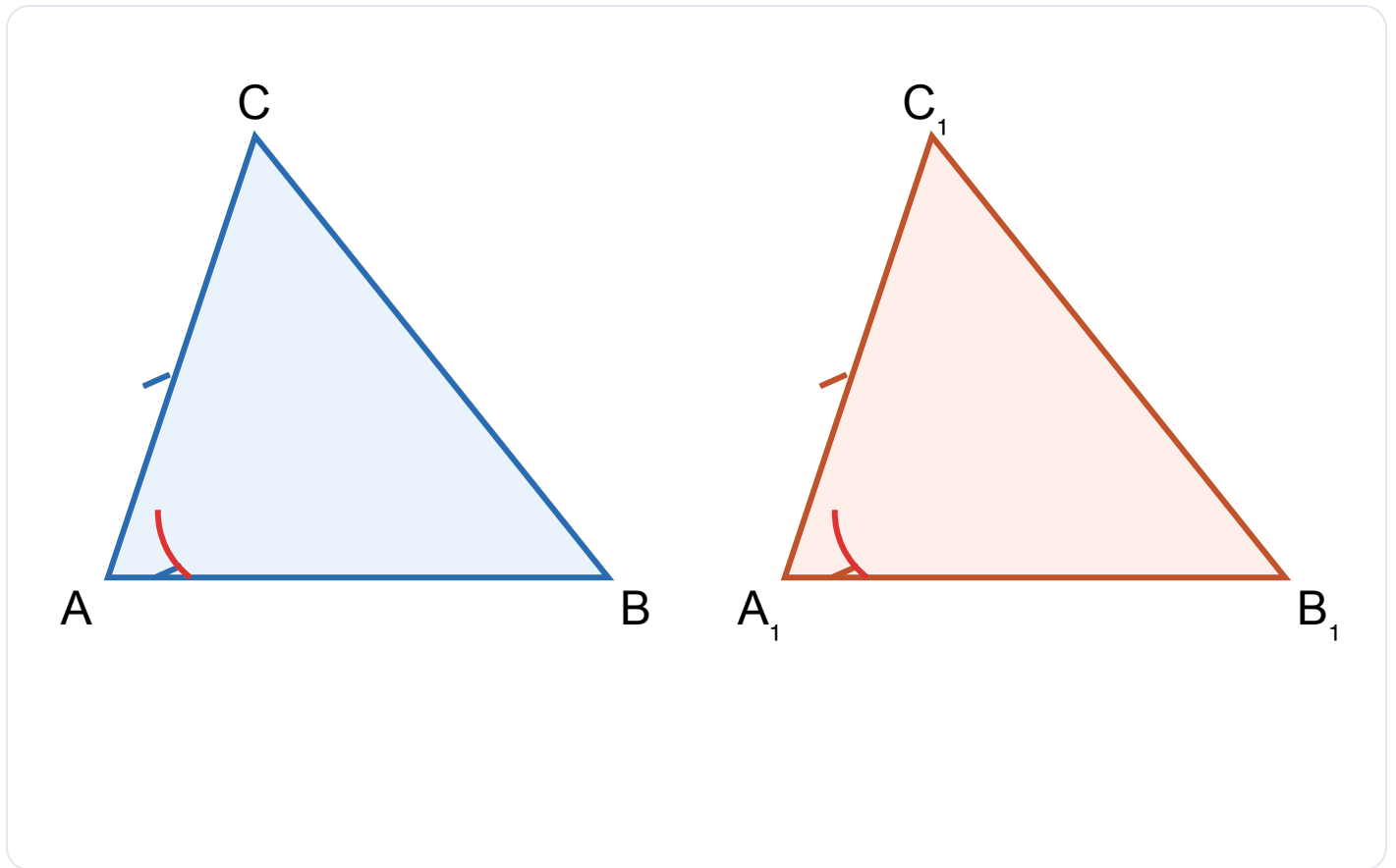



Рис. 3. $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ (штрихи), $\angle A = \angle A_1$ (дуга) \Rightarrow треугольники равны


Доказательство-идея (простыми словами).

Дано: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$ (угол между этими сторонами). Хотим показать, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то есть что их можно совместить.

1. Мысленно наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A легла на вершину A_1 , а сторона AB пошла вдоль стороны A_1B_1 .
2. Так как $\angle A = \angle A_1$, вторая сторона AC ляжет точно вдоль луча A_1C_1 (углы-то одинаковые — стороны угла «раскрыты» на одинаковую ширину).
3. Так как $AB = A_1B_1$, точка B попадёт ровно в точку B_1 . Так как $AC = A_1C_1$, точка C попадёт ровно в точку C_1 .
4. Значит, все три вершины совместились: $A \rightarrow A_1$, $B \rightarrow B_1$, $C \rightarrow C_1$. А раз совпали вершины — совпали и соединяющие их отрезки BC и B_1C_1 . Треугольники полностью совместились.

Что и требовалось: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. ■

 **Лайфхак:** Доказал равенство треугольников — и тут же бесплатно получаешь равенство **всех** их соответственных элементов: третьих сторон и оставшихся углов. Именно поэтому признаки равенства — самый мощный инструмент в задачах: через них доказывают, что отрезки или углы равны.

 **Начерти сам:** построй угол примерно в 50° , отложи на его сторонах от вершины 4 см и 6 см, соедини концы. Потом сделай рядом такой же. Наложь (или просто сравни линейкой третьи стороны) — они равны!

Разбор задач

Задача 1. Дано: отрезки AB и CD пересекаются в точке O — середине каждого из них (то есть $AO = OB$, $CO = OD$). **Доказать:** $AC = BD$.

Решение.

1. Рассмотрим треугольники AOC и BOD .
2. $AO = OB$ — по условию (O — середина AB).
3. $CO = OD$ — по условию (O — середина CD).
4. $\angle AOC = \angle BOD$ — как **вертикальные** углы (они равны).
5. Угол лежит между сторонами AO , CO в одном треугольнике и между OB , OD в другом. Значит, по первому признаку (две стороны и угол между ними) $\triangle AOC = \triangle BOD$.
6. Из равенства треугольников следует $AC = BD$ (соответственные стороны).

Ответ: доказано: $AC = BD$.

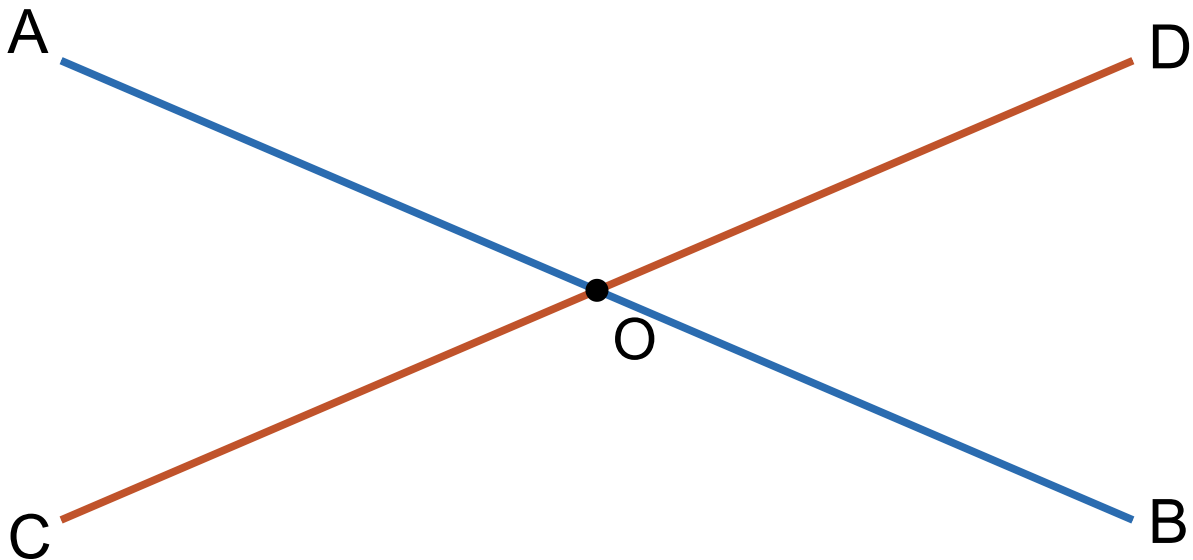


Рис. 4. AB и CD пересекаются в середине O

Задача 2. Дано: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, причём $AB = 7$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 40^\circ$. **Найти:** A_1B_1 , B_1C_1 , $\angle B_1$.

Решение. В записи $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ соответствуют: $A \leftrightarrow A_1$, $B \leftrightarrow B_1$, $C \leftrightarrow C_1$. Значит, соответственные элементы равны: $A_1B_1 = AB = 7$ см, $B_1C_1 = BC = 5$ см, $\angle B_1 = \angle B = 40^\circ$.

Ответ: $A_1B_1 = 7$ см, $B_1C_1 = 5$ см, $\angle B_1 = 40^\circ$.

Задача 3. Дано: на рисунке $BA = BC$, $\angle ABD = \angle CBD$ (BD — общая сторона, луч из B). **Доказать:** $AD = DC$.

Решение.

1. Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$.
2. $BA = BC$ — по условию.
3. $BD = BD$ — общая сторона.

- $\angle ABD = \angle CBD$ — по условию (это углы между сторонами BA, BD и BC, BD).
- По первому признаку $\triangle ABD = \triangle CBD$.
- Следовательно, $AD = DC$ (соответственные стороны).

Ответ: доказано: $AD = DC$.

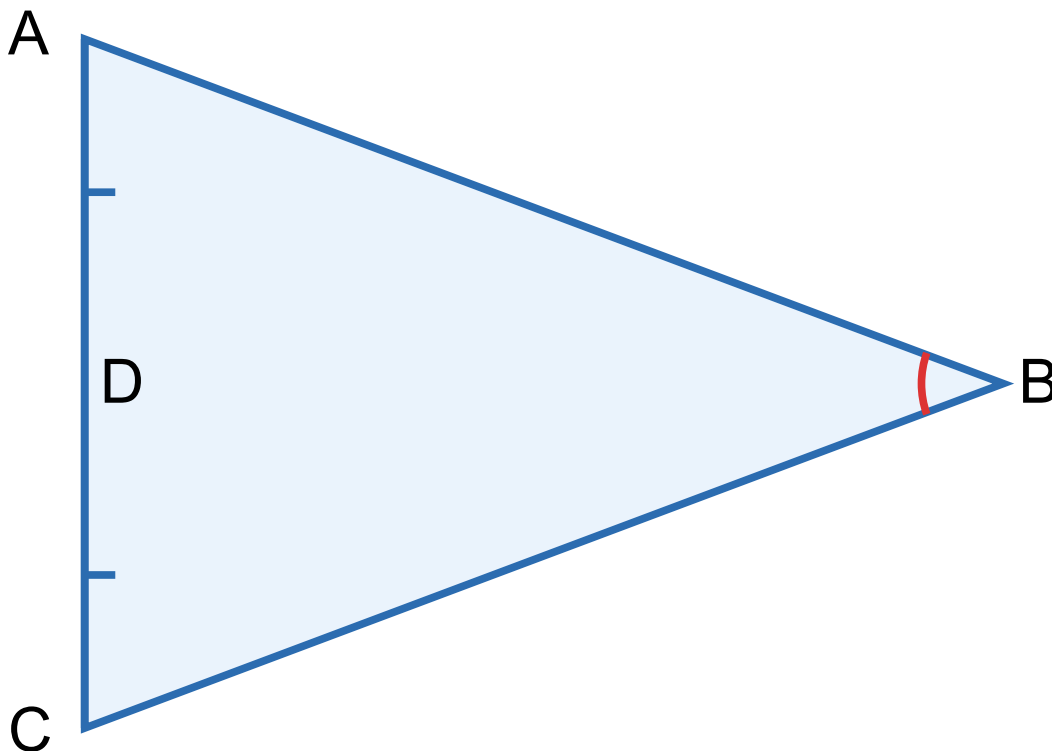


Рис. 5. $BA = BC$ (штрихи), $\angle ABD = \angle CBD$, BD — общая

Задача 4. Дано: $\triangle MNK$ и $\triangle MPK$; $NM = PM$, $\angle NMK = \angle PMK$, сторона MK общая.

Доказать: $\angle N = \angle P$.

Решение.

- В треугольниках MNK и MPK : $NM = PM$ (дано), $MK = MK$ (общая), $\angle NMK = \angle PMK$ (дано) — угол между сторонами NM, MK и PM, MK .

2. По первому признаку $\triangle MNK = \triangle MPK$.
3. Из равенства треугольников $\sphericalangle N = \sphericalangle P$ (соответственные углы, лежащие против стороны МК в каждом треугольнике).

Ответ: доказано: $\sphericalangle N = \sphericalangle P$.

Задача 5. Дано: $AB = CD$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$, точки В и D по одну сторону от прямой AC. **Доказать:** $\triangle BAC = \triangle DCA$.

Решение.

1. В $\triangle BAC$ и $\triangle DCA$: $AB = CD$ — по условию.
2. $AC = CA$ — общая сторона.
3. $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$ — по условию (угол между сторонами АВ, АС и CD, СА).
4. По первому признаку $\triangle BAC = \triangle DCA$.

Ответ: доказано (по первому признаку).



Запомни главное

- **Треугольник** — три вершины (не на одной прямой) и три соединяющих отрезка.
- Треугольники **равны**, если совмещаются наложением; тогда равны все их соответственные стороны и углы.
- В записи $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ буквы идут **в порядке соответствия** — отсюда сразу читаются все равенства.
- **Первый признак:** две стороны и угол **между ними** \Rightarrow треугольники равны.
- Доказал равенство треугольников — получи равенство любых соответственных элементов. Это главный способ доказывать равенство отрезков и углов.



Домашнее задание

1. Назови все вершины, стороны и углы треугольника PQR.

2. Запиши, какие стороны и углы равны, если $\triangle ABC = \triangle KLM$.
3. $\triangle DEF = \triangle XYZ$, $DE = 6$ см, $\angle E = 70^\circ$, $EF = 4$ см. Найди XY , $\angle Y$, YZ .
4. Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O . Докажи, что $AD = CB$.
5. На сторонах угла O отложены равные отрезки: $OA = OB$ на одной стороне и $OC = OD$ на другой (A, C от вершины ближе). Докажи, что $\triangle OAD = \triangle OCB$?
(Подсказка: рассмотри $\triangle OAD$ и $\triangle OCB$, угол O общий.)
6. В $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Докажи, что $BC = B_1C_1$ и $\angle C = \angle C_1$.
7. Дано: $BA = BC$, BD — луч из B , $\angle ABD = \angle CBD$. Докажи, что $\angle A = \angle C$.
8. ★ В четырёхугольнике $ABCD$ известно: $AB = AD$ и $\angle BAC = \angle DAC$. Докажи, что $BC = DC$ и $\angle B = \angle D$. (Подсказка: проведи диагональ AC .)