

Урок 9. Перпендикуляр к прямой; медианы, биссектрисы и высоты треугольника

Геометрия, 7 класс · Гл. II, §2 · ~45 минут


Что ты узнаешь

- Что такое перпендикуляр к прямой и почему из точки его можно опустить только один.
- Что такое **медиана**, **биссектриса** и **высота** треугольника — три самые важные линии.
- Как их правильно проводить и где они могут лежать (внутри треугольника, по стороне или даже снаружи!).
- Научишься узнавать эти три линии на чертеже с первого взгляда.

Разбираемся в теме

В каждом треугольнике можно провести кучу разных отрезков. Но три вида из них — настоящие звёзды геометрии. Они встретятся тебе сотни раз. Сегодня знакомимся: медиана, биссектриса, высота. Но сначала — короткий, но важный «инструмент»: перпендикуляр.

Перпендикуляр к прямой

 **Определение:** Перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, — это отрезок, соединяющий данную точку с точкой прямой и **перпендикулярный** этой прямой. Конец отрезка на прямой называется **основанием перпендикуляра**.

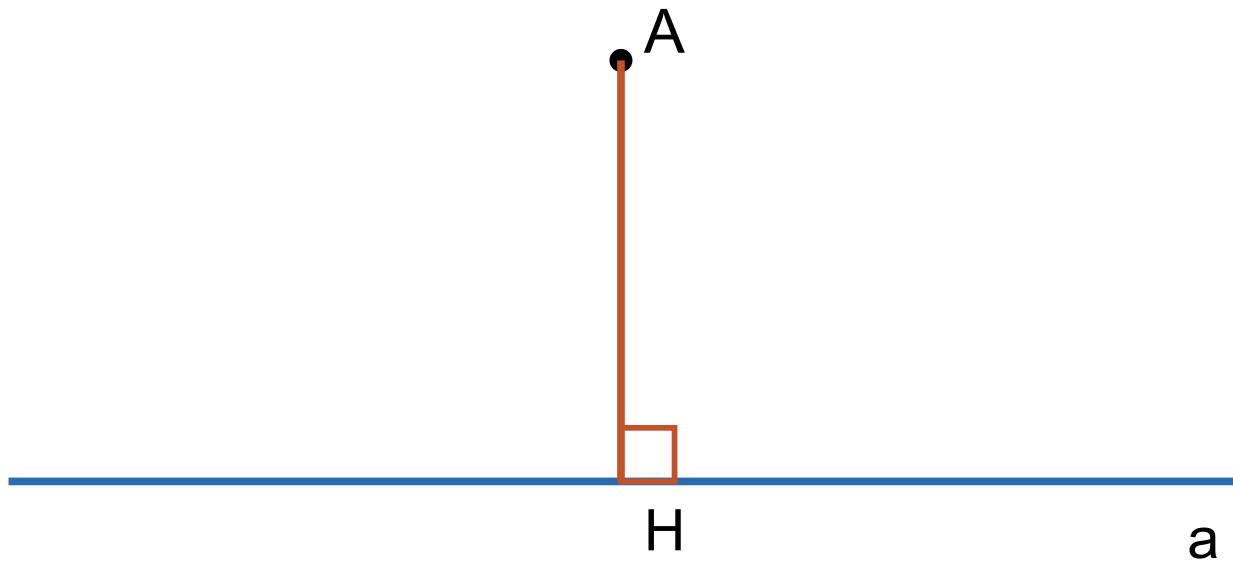


Рис. 1. AH — перпендикуляр из точки A к прямой a ; H — основание

Главный факт: **из любой точки, не лежащей на прямой, можно опустить ровно один перпендикуляр к этой прямой.** Не два, не ноль — ровно один. Это короткий «прямой путь» от точки до прямой, и он самый короткий из всех отрезков от точки до прямой.

Лайфхак: Прямой угол на чертеже отмечают маленьким квадратиком в углу (как на рис. 1). Увидел квадратик — значит, перпендикуляр.

Теперь у нас есть всё нужное. Знакомься с тремя линиями треугольника.

Медиана — «к середине»

Определение: Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с **серединой противоположной стороны**.

Ключевое слово — *середина*. Медиана делит сторону пополам (равные половинки помечают штрихами).

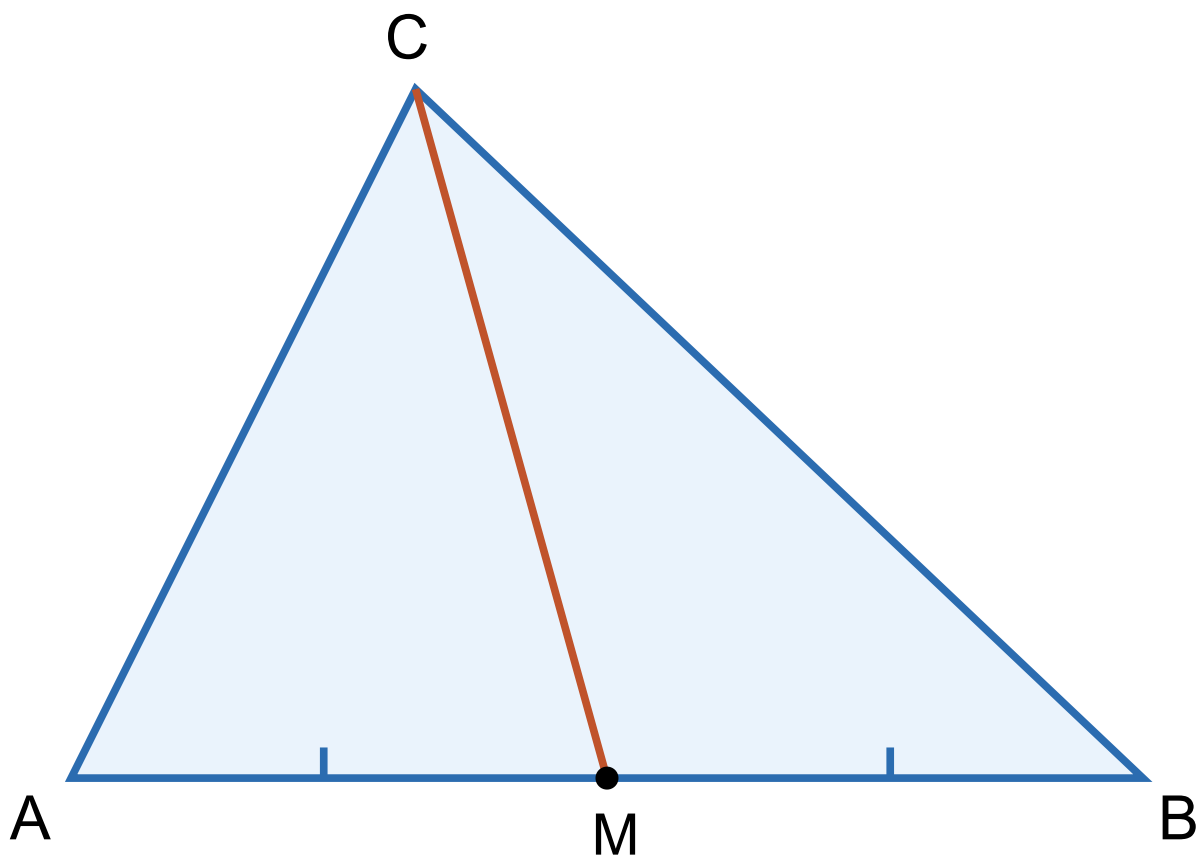


Рис. 2. CM — медиана: $AM = MB$ (M — середина AB)

🤔 **А знаешь ли ты?** Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке — её называют **центром тяжести**. Если вырезать треугольник из картона, он будет идеально балансировать на кончике карандаша, поставленного в эту точку!

Биссектриса — «делит угол пополам»

🔺 **Определение:** Биссектриса треугольника — это отрезок биссектрисы угла треугольника, идущий от вершины до точки на противоположной стороне.

То есть биссектриса выходит из вершины и делит её **угол** ровно пополам (равные половинки угла помечают дугами).

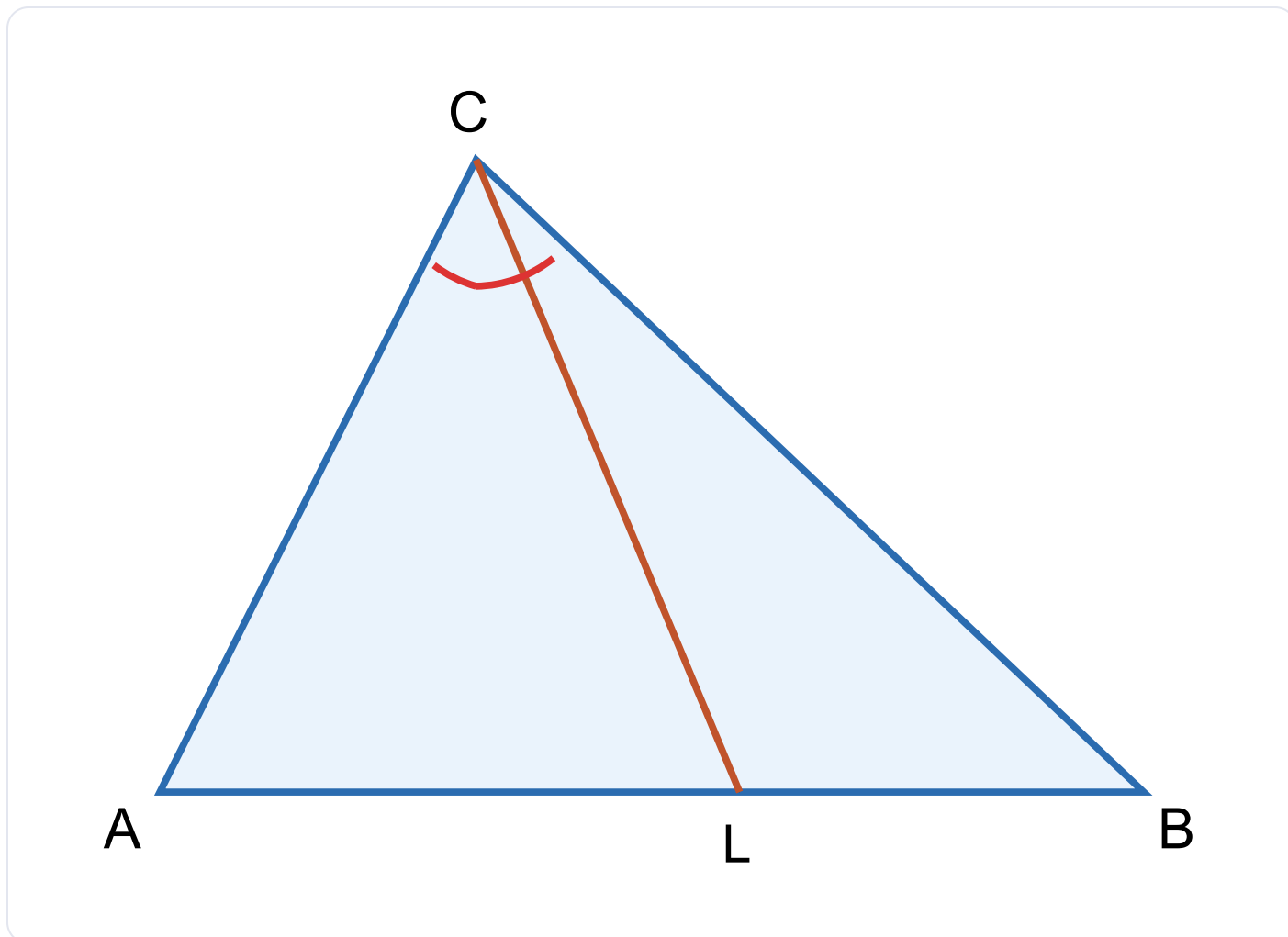


Рис. 3. CL — биссектриса: $\angle ACL = \angle LCB$

⚠ Частая ошибка: Медиана делит пополам **сторону**, а биссектриса делит пополам **угол**. Их легко перепутать! Запомни: биссектри**С**а — про угол (с... как «секу угол»), медиана — к середине стороны.

Высота — «перпендикуляр к стороне»

📐 Определение: Высота треугольника — это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону.

Вот тут пригодился перпендикуляр из начала урока! Высота встречается сторону под прямым углом (отмечаем квадратиком).

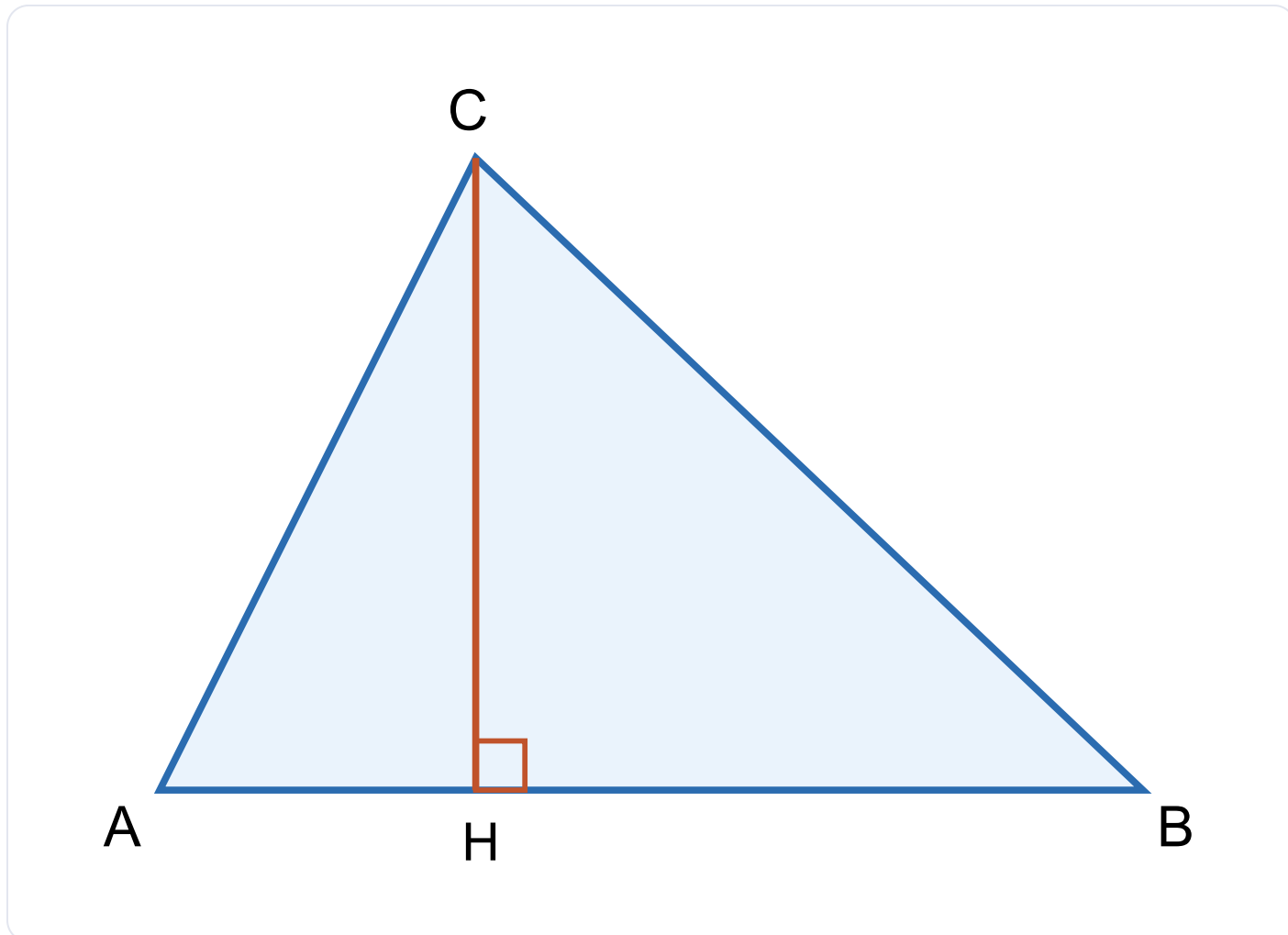


Рис. 4. CH — высота: $CH \perp AB$

А где же они лежат?

Медиана и биссектриса всегда уютно располагаются **внутри** треугольника. А вот высота — хитрюга. Её положение зависит от вида треугольника:

- В **остроугольном** треугольнике все три высоты лежат внутри.
- В **прямоугольном** две высоты совпадают со сторонами (катетами), идущими из вершины прямого угла.
- В **тупоугольном** две высоты выходят **за пределы** треугольника! Чтобы их построить, сторону приходится продлевать. Вот зачем в определении сказано «на прямую, содержащую сторону», а не просто «на сторону».

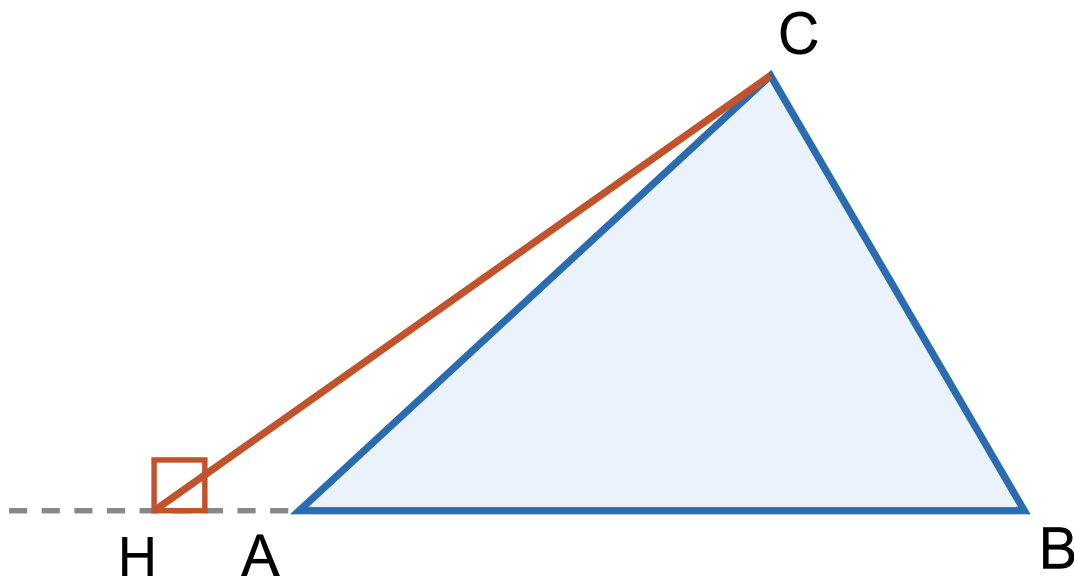


Рис. 5. Тупоугольный $\triangle ABC$: высота CH падает на продолжение стороны AB (вне треугольника)

🤔 **А знаешь ли ты?** Как и медианы, все три высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке — она называется **ортоцентр**. И три биссектрисы тоже пересекаются в одной точке — центре вписанной окружности. Эти линии словно специально «договорились» собираться вместе!

🕒 **Начерти сам:** нарисуй один большой треугольник и проведи в нём из одной вершины все три линии: медиану, биссектрису и высоту. Увидишь, что это (обычно) три разных отрезка, идущих из одной точки.

✍️ Разбор задач

Задача 1. Дано: в $\triangle ABC$ сторона $AB = 12$ см, CM — медиана. **Найти:** AM и MB .

Решение. CM — медиана, значит M — середина AB . Тогда $AM = MB = AB : 2 = 12 : 2 = 6$ см.

Ответ: $AM = MB = 6$ см.

Задача 2. Дано: в $\triangle ABC$ угол C равен 80° , CL — биссектриса. **Найти:** $\angle ACL$ и $\angle LCB$.

Решение. Биссектриса делит угол C пополам: $\angle ACL = \angle LCB = \angle C : 2 = 80^\circ : 2 = 40^\circ$.

Ответ: $\angle ACL = \angle LCB = 40^\circ$.

Задача 3. Дано: CH — высота треугольника ABC , $\angle HCB = 35^\circ$. **Найти:** $\angle CHB$.

Решение. Высота перпендикулярна стороне, на которую опущена: $CH \perp AB$.
Значит, $\angle CHB = 90^\circ$.

Ответ: $\angle CHB = 90^\circ$. (А $\angle HCB = 35^\circ$ тут «лишнее» — ловушка: высота даёт прямой угол при основании независимо от других углов.)

Задача 4. Дано: отрезок CD выходит из вершины C треугольника ABC и делит угол ACB на два угла по 25° . **Определить:** чем является CD ?

Решение. CD делит угол C на два равных угла ($25^\circ = 25^\circ$), идёт из вершины к противоположной стороне. По определению это **биссектриса**.

Ответ: CD — биссектриса угла C .

Задача 5. Дано: $\triangle ABC$ прямоугольный, прямой угол при вершине C .

Определить: где лежат высоты, опущенные из вершин A и B ?

Решение. Высота из A — это перпендикуляр к стороне BC . Но сторона AC уже перпендикулярна BC (угол C прямой). Значит, высота из A совпадает со стороной AC . Аналогично высота из B совпадает со стороной BC . Лишь высота из вершины прямого угла C проходит внутри.

Ответ: две высоты совпадают с катетами AC и BC .



Запомни главное

- **Перпендикуляр** из точки к прямой — единственный; даёт прямой угол с прямой.
- **Медиана** соединяет вершину с **серединной** противоположной стороны (делит сторону пополам).
- **Биссектриса** делит **угол** при вершине пополам.
- **Высота** — перпендикуляр из вершины к прямой, содержащей противоположную сторону.
- Медиана и биссектриса — всегда внутри; высота может лежать внутри, по стороне (прямоугольный) или **снаружи** (тупоугольный).



Домашнее задание

1. В $\triangle ABC$ проведена медиана BM . Какую сторону она делит пополам и на какие отрезки?
2. $\angle A$ треугольника равен 64° , AD — биссектриса. Найди $\angle BAD$ и $\angle DAC$.
3. AH — высота треугольника ABC . Чему равен угол AHC ?
4. В $\triangle MNK$ медиана NF делит сторону MK так, что $MF = 7$ см. Найди MK .
5. Отрезок из вершины треугольника делит противоположную сторону пополам. Как он называется?
6. В каком треугольнике высота может лежать вне его? Сделай чертёж такого случая.
7. В прямоугольном треугольнике с прямым углом C проведена высота из C . Где лежат две другие высоты?
8. Биссектриса угла B треугольника образует со стороной угол 30° . Чему равен весь угол B ?
9. ★ В $\triangle ABC$ из вершины C провели и медиану, и биссектрису, и высоту. Может ли так случиться, что все три совпали в один отрезок? В каком треугольнике? (Подумай про симметричный треугольник — узнаешь о нём в следующем уроке.)