Урок 10. Равнобедренный треугольник и его свойства

Геометрия, 7 класс · Гл. II, §2 · ~45 минут

🎯 Что ты узнаешь

- Что такое **равнобедренный** и **равносторонний** треугольники.
- Как называются их стороны: боковые стороны и основание.
- Теорему об углах при основании (углы при основании равны!).
- Теорему о том, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, — это ещё и медиана, и высота (три в одном!).

📖 Разбираемся в теме

Среди всех треугольников есть особенно «аккуратные» — симметричные. Их так часто рисуют на флагах, в архитектуре и дорожных знаках именно потому, что они выглядят уравновешенно. Сегодня мы разберём, почему у них такая красивая симметрия — и докажем это строго.

Что такое равнобедренный треугольник

> 📐 **Определение:** Равнобедренный треугольник — это треугольник, у которого **две стороны равны**.

Эти две равные стороны называют **боковыми**, а третью — **основанием**.

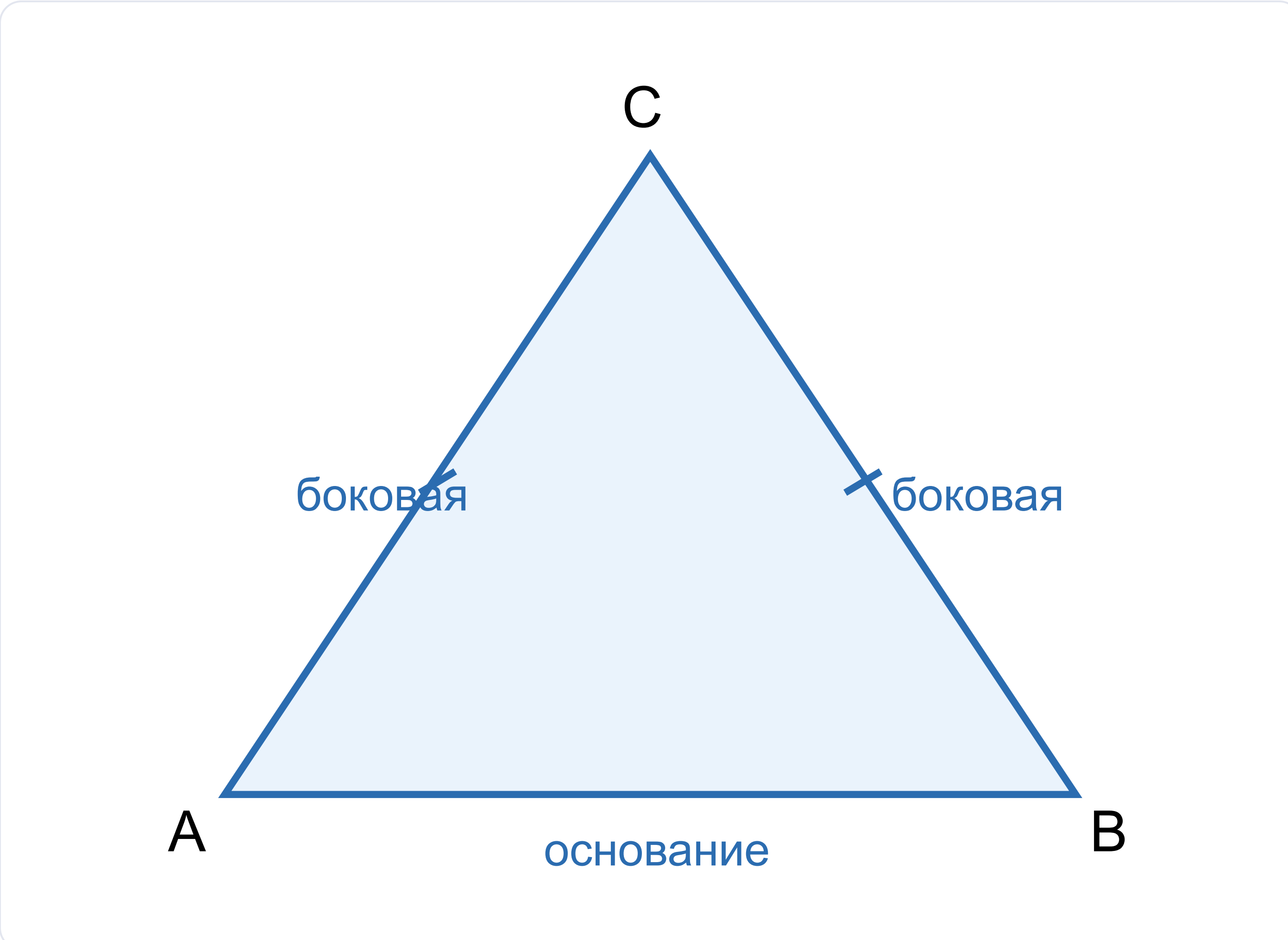

Рис. 1. Равнобедренный △ABC: CA = CB (боковые), AB — основание

> 💡 **Лайфхак:** «Равнобедренный» = «равные бёдра». Боковые стороны — это как две одинаковые «ноги» (бедра) треугольника, а основание — то, на чём он стоит. Углы при основании — те два угла, что прилегают к основанию.

Равносторонний треугольник

> 📐 **Определение:** Равносторонний треугольник — это треугольник, у которого **все три стороны равны**.

Равносторонний — это особый случай равнобедренного (ведь у него есть равные стороны, и даже все три!). Поэтому всё, что верно для равнобедренного, верно и для равностороннего.

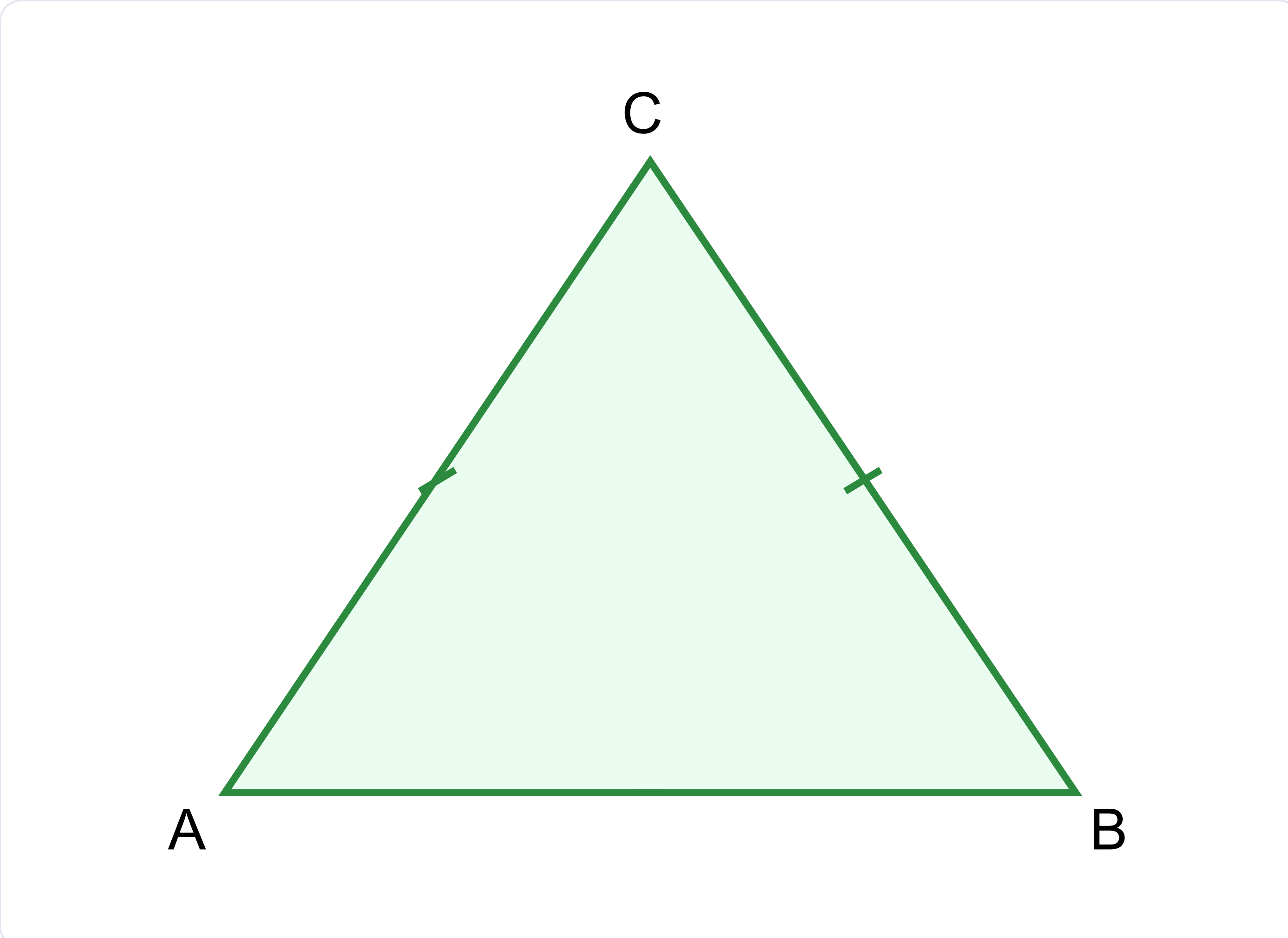

Рис. 2. Равносторонний △ABC: AB = BC = CA

Теорема об углах при основании

А теперь — первое настоящее открытие урока.

> 📏 **Теорема:** В равнобедренном треугольнике **углы при основании равны**.

То есть если CA = CB, то ∠A = ∠B.

Доказательство-идея.

Дано: △ABC, CA = CB. Докажем, что ∠A = ∠B.

1. Проведём из вершины C биссектрису CD к основанию (она делит угол C пополам: ∠ACD = ∠BCD).
2. Сравним △ACD и △BCD:

- $CA = CB$ — по условию (боковые стороны);
- $\angle ACD = \angle BCD$ — потому что CD биссектриса;
- $CD = CD$ — общая сторона.

3. По **первому признаку** (две стороны и угол между ними) $\triangle ACD = \triangle BCD$.
4. Из равенства треугольников следуют равные соответственные углы: $\angle A = \angle B$.

∎

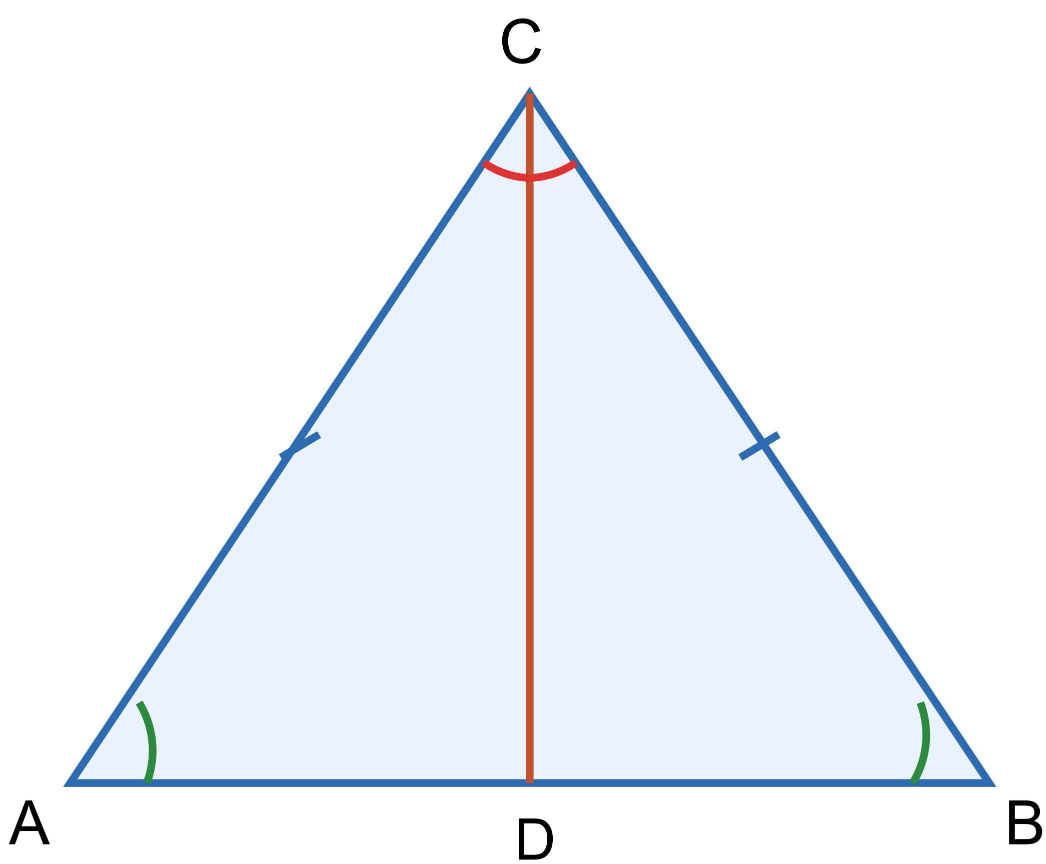

Рис. 3. CD — биссектриса; $\triangle ACD = \triangle BCD \Longrightarrow \angle A = \angle B$

🤔 **А знаешь ли ты?** Эту теорему ещё со средних веков шутливо называли *Pons Asinorum* — «мост ослов». Считалось, что если ученик смог пройти

> через её доказательство, то с геометрией у него точно сложится. Ну а ты только что прошёл по этому мосту!

Три линии в одном

Та биссектриса CD из доказательства оказалась куда полезнее, чем кажется.

> 📏 **Теорема:** В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является одновременно **медианой** и **высотой**.

Доказательство-идея.

Из предыдущего доказательства мы уже знаем: $\triangle ACD = \triangle BCD$. Из их равенства:

- $AD = DB$ (соответственные стороны) $\Longrightarrow$ D — середина основания $\Longrightarrow$ CD — **медиана**.
- $\angle ADC = \angle BDC$ (соответственные углы). А вместе они дают развёрнутый угол: $\angle ADC + \angle BDC = 180°$. Значит, каждый из них равен $90°$, то есть $CD \perp AB \Longrightarrow$ CD — **высота**.

Итак, один отрезок CD = биссектриса = медиана = высота. ∎

> 💡 **Лайфхак:** В равнобедренном треугольнике, как только проведёшь линию из вершины к основанию и узнаешь, что это медиана (или высота, или биссектриса), — три остальных свойства идут «в подарок». Очень экономит время в задачах!

> ⚠️ **Частая ошибка:** Это «три в одном» работает только для линии, проведённой **к основанию** (из вершины между равными сторонами). Из других вершин биссектриса, медиана и высота — разные отрезки!

⏱️ **Начерти сам:** нарисуй равнобедренный треугольник, аккуратно сложи лист по линии от вершины к середине основания. Половинки совпадут — вот она, симметрия и наглядное доказательство теоремы!

А для равностороннего треугольника есть приятный бонус: раз он равнобедренный относительно **любой** стороны, то все его углы равны. (Позже узнаешь, что каждый из них равен $60°$.)

✍️ Разбор задач

Задача 1. Дано: равнобедренный $\triangle ABC$, $CA = CB$, $\angle A = 50°$. **Найти:** $\angle B$.

Решение. Углы при основании AB равны: $\angle B = \angle A = 50°$.

Ответ: $\angle B = 50°$.

Задача 2. Дано: равнобедренный $\triangle ABC$ с основанием AB; периметр 36 см, основание $AB = 10$ см. **Найти:** боковую сторону.

Решение. Боковые стороны равны, обозначим каждую x. Периметр: $x + x + AB = 36$, то есть $2x + 10 = 36$, $2x = 26$, $x = 13$ см.

Ответ: боковая сторона = 13 см.

Задача 3. Дано: в равнобедренном $\triangle ABC$ ($CA = CB$) проведена высота CH к основанию; $AB = 16$ см. **Найти:** AH.

Решение. Высота к основанию в равнобедренном треугольнике является и медианой, значит H — середина AB. Тогда $AH = AB : 2 = 16 : 2 = 8$ см.

Ответ: $AH = 8$ см.

Задача 4. Дано: в равнобедренном $\triangle ABC$ ($CA = CB$) проведена медиана CM к основанию. **Доказать:** $CM \perp AB$.

Решение. По теореме о трёх линиях медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является и высотой. Высота перпендикулярна стороне, значит $CM \perp AB$.

Ответ: доказано: $CM \perp AB$.

Задача 5. Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = \angle B = 70°$, $AB = 5$ см. (Это «обратная» ситуация: углы при AB равны.) **Доказать, что $AC = BC$, и найти AC при условии $BC = 6$ см.**

Решение. Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный с основанием между этими углами (это обратная теорема). Углы ∠A, ∠B прилежат к стороне AB, значит AB — основание, а боковые стороны AC и BC равны: AC = BC = 6 см.

Ответ: AC = 6 см.

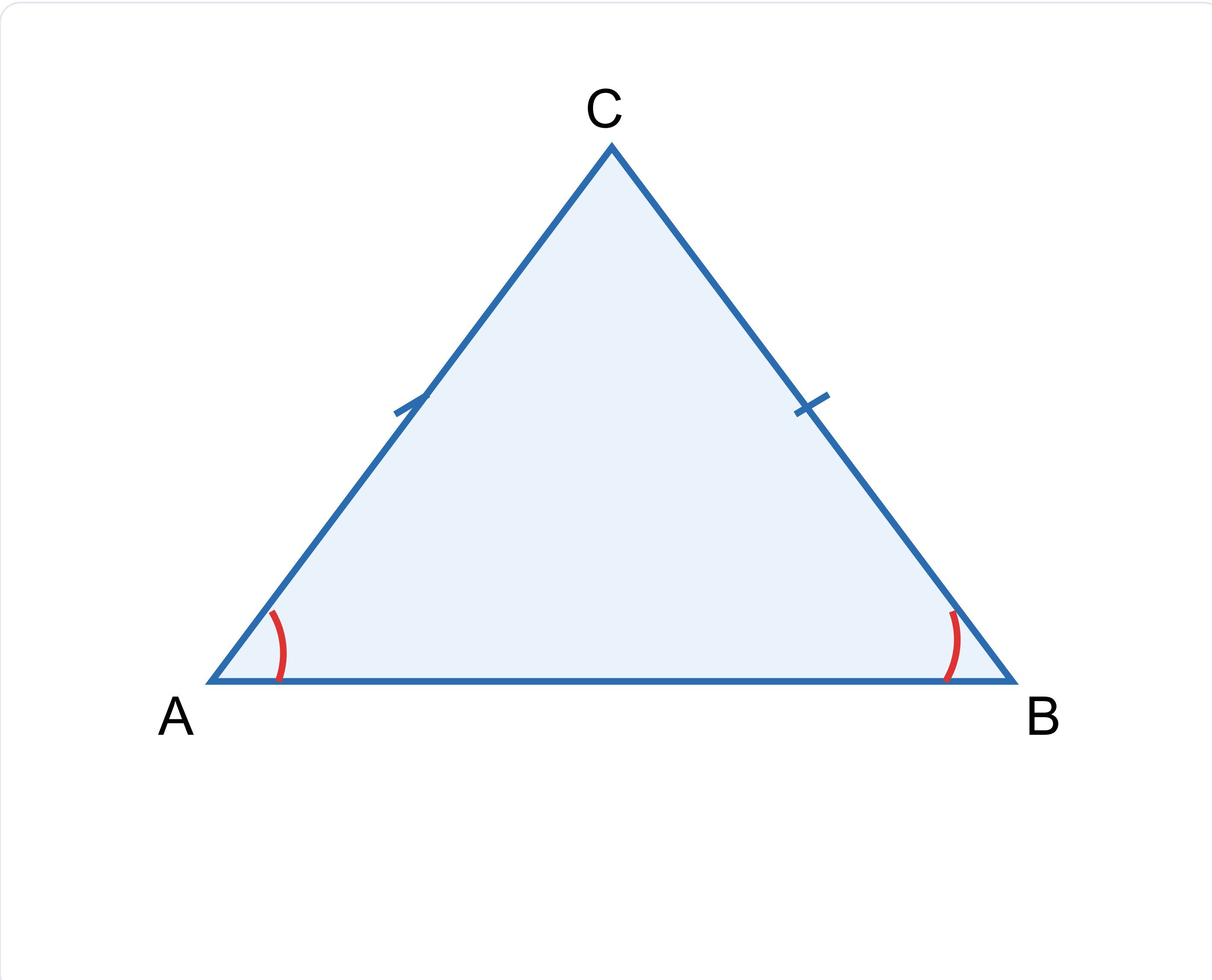

Рис. 4. ∠A = ∠B ⟹ AC = BC (равнобедренный)

Задача 6. Дано: равносторонний △ABC, периметр 27 см. **Найти:** длину стороны.

Решение. Все стороны равны, их три: сторона = 27 : 3 = 9 см.

Ответ: 9 см.

💡 Запомни главное

- **Равнобедренный** — две равные стороны (боковые); третья — основание. **Равносторонний** — все три равны (частный случай равнобедренного).
- **Углы при основании равны** (если боковые равны).
- Обратно: если два угла равны, треугольник равнобедренный.
- Линия из вершины к основанию: **биссектриса = медиана = высота** (всё сразу).
- Это «три в одном» — только для линии к основанию, не из других вершин.

📝 Домашнее задание

1. В равнобедренном △ABC (CA = CB) угол при основании ∠A = 47°. Найди ∠B.
2. Периметр равнобедренного треугольника 40 см, основание 12 см. Найди боковую сторону.
3. Периметр равнобедренного треугольника 50 см, боковая сторона 18 см. Найди основание.
4. Стороны равностороннего треугольника по 7 см. Найди периметр.
5. В равнобедренном △ABC (CA = CB) проведена биссектриса CD к основанию AB = 14 см. Найди AD.
6. В равнобедренном △ABC (CA = CB) высота CH к основанию делит его на отрезки. Чему равен ∠CHA?
7. В △MNK даны ∠M = ∠K. Какие стороны равны?
8. В равнобедренном треугольнике один из углов при основании равен 65°. Сделай вывод о другом угле при основании.
9. ⭐ В равнобедренном △ABC (CA = CB) на боковых сторонах отложены равные отрезки: AP на CA и BQ на CB, AP = BQ. Докажи, что AQ = BP. (Подсказка: рассмотри △ABQ и △BAP, используй ∠A = ∠B.)