Урок 11. Второй признак равенства треугольников

Геометрия, 7 класс · Гл. II, §3 · ~45 минут

🎯 Что ты узнаешь

- Сформулируешь и поймёшь **второй признак равенства треугольников** (по стороне и двум прилежащим к ней углам).
- Поймёшь идею его доказательства.
- Научишься выбирать, какой признак применить — первый или второй.
- Решишь задачи, где сторону «зажимают» с двух сторон углы.

📖 Разбираемся в теме

В прошлый раз мы выяснили: чтобы доказать равенство треугольников, не нужны все шесть элементов — хватает трёх. Первый признак: **две стороны и угол между ними**. Но это не единственный «удачный» набор из трёх! Сегодня — ещё один.

Вспомним задачу из жизни

Представь: землемеру нужно измерить расстояние через реку до дерева на том берегу, не переплывая её. Он становится так, чтобы видеть дерево, измеряет один отрезок вдоль своего берега и два угла, под которыми видно дерево с концов этого отрезка. Этого хватает, чтобы построить точно такой же треугольник на бумаге! Почему? Потому что работает второй признак.

> 📏 **Теорема (второй признак равенства треугольников):** Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны

стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

«Прилежащие к стороне углы» — это два угла, которые опираются на концы этой стороны. Например, к стороне AB прилежат углы A и B.

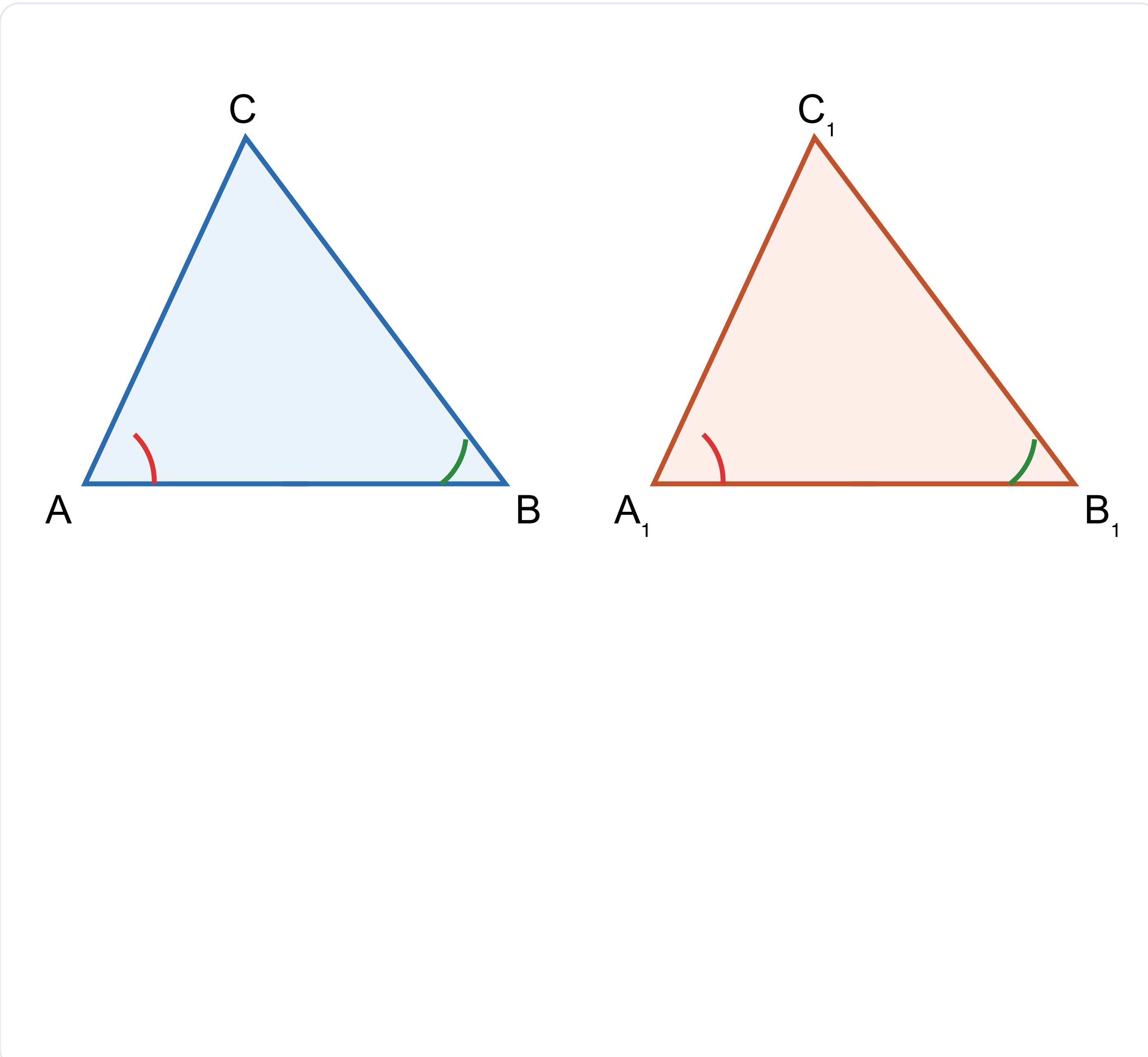

Рис. 1. $AB = A_1B_1$ (штрих), $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (дуги) $\Longrightarrow$ треугольники равны

Доказательство-идея (простыми словами).

Дано: $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

1. Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы сторона AB совместилась со стороной A_1B_1 (это возможно: они равны, $A \to A_1$, $B \to B_1$).
2. Так как $\angle A = \angle A_1$, сторона AC пойдёт вдоль луча A_1C_1. Так как $\angle B = \angle B_1$, сторона BC пойдёт вдоль луча B_1C_1.
3. Значит, точка C — пересечение лучей AC и BC — попадёт в точку пересечения лучей A_1C_1 и B_1C_1, то есть в C_1. (Две прямые пересекаются только в одной точке — поэтому C ложится именно на C_1.)
4. Все три вершины совместились $\Longrightarrow$ треугольники совпали. ∎

💡 **Лайфхак:** Как отличить, какой признак применять?

- Знаешь **две стороны и угол между ними** → первый признак.
- Знаешь **сторону и два угла по её концам** → второй признак. Считай, что́ дано — стороны или углы — и где они расположены.

⚠️ **Частая ошибка:** Углы должны быть **прилежащими к данной стороне** (опираться на её концы). Если один из углов лежит у противоположной вершины — это другая ситуация (её разбирают позже). Для второго признака оба угла «сидят» на концах общей стороны.

🤔 **А знаешь ли ты?** Именно второй признак лежит в основе старинного способа измерять недоступные расстояния — через реку, до корабля в море, до вершины горы. Достаточно измерить одну «базовую» линию и два угла — и можно вычислить весь треугольник. Этим методом (триангуляцией) когда-то составляли карты целых стран!

⏱️ **Начерти сам:** проведи отрезок AB длиной 6 см. В точке A построй угол 50°, в точке B — угол 60°. Продли стороны углов до пересечения — получишь точку C. Треугольник готов, и он у всех получится одинаковым: вот тебе второй признак в действии.

✍️ Разбор задач

Задача 1. Дано: отрезки AB и CD пересекаются в точке O — середине отрезка AB; ∠A = ∠B (углы при концах AB). **Доказать:** △AOC = △BOD.

Решение.

1. В △AOC и △BOD: AO = OB — O середина AB.
2. ∠A = ∠B — по условию (прилежат к стороне AO и OB соответственно).
3. ∠AOC = ∠BOD — вертикальные углы (прилежат к стороне у вершины O).
4. Сторона AO с двумя прилежащими углами (∠A и ∠AOC) равна стороне OB с прилежащими углами (∠B и ∠BOD).
5. По второму признаку △AOC = △BOD. ∎

Ответ: доказано.

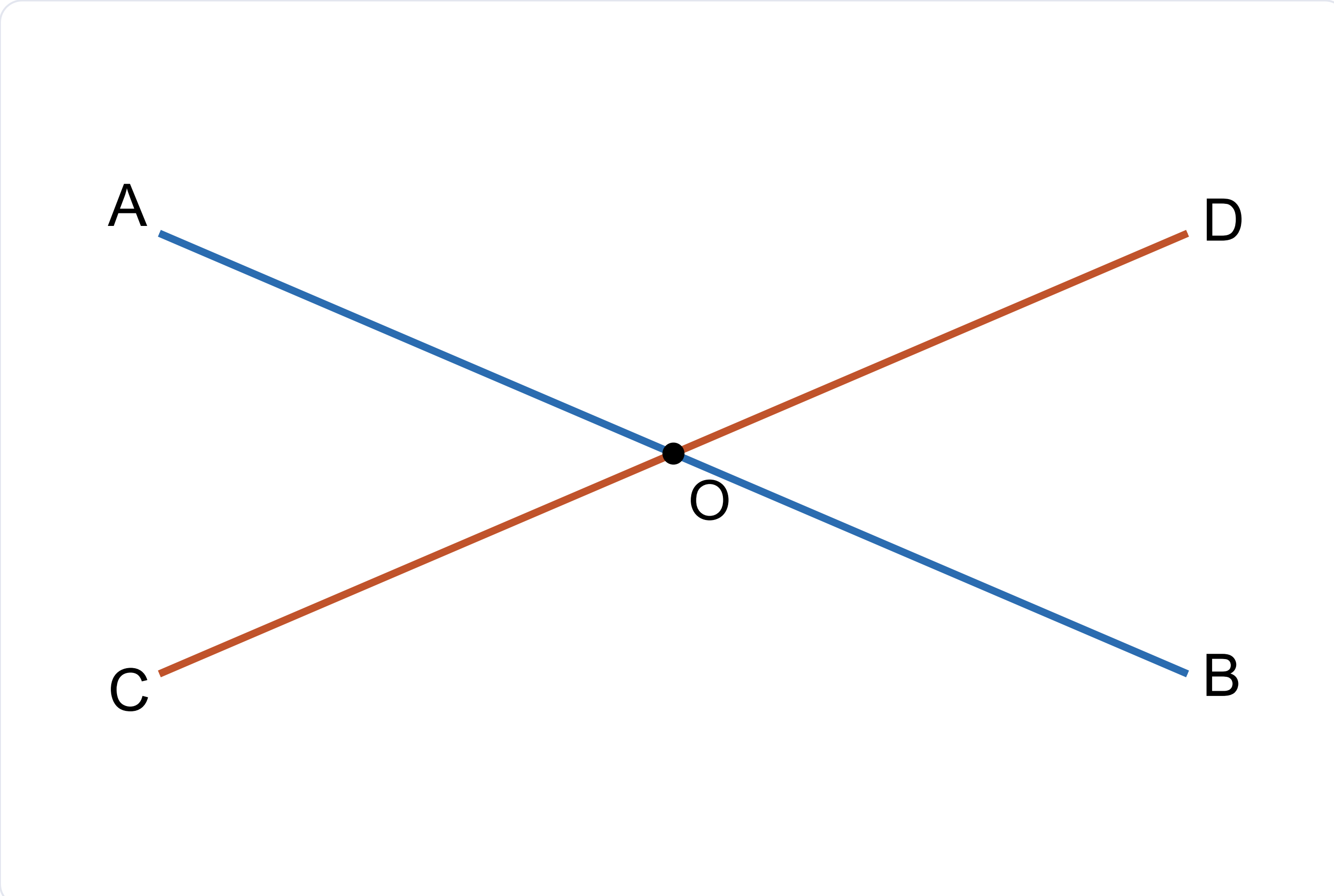

Рис. 2. O — середина AB; ∠A = ∠B

Задача 2. Дано: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, AB = 8 см, ∠A = 55°, ∠B = 65°. **Найти:** A_1B_1, $\angle A_1$, $\angle B_1$.

Решение. По соответствию $A \leftrightarrow A_1$, $B \leftrightarrow B_1$: $A_1B_1 = AB = 8$ см, $\angle A_1 = \angle A = 55°$, $\angle B_1 = \angle B = 65°$.

Ответ: $A_1B_1 = 8$ см, $\angle A_1 = 55°$, $\angle B_1 = 65°$.

Задача 3. Дано: ∠CAB = ∠DBA, ∠CBA = ∠DAB; AB — общая сторона (точки C, D по разные стороны или по одну от AB). **Доказать:** AC = BD.

Решение.

1. Рассмотрим △CAB и △DBA.
2. AB = BA — общая сторона.
3. ∠CAB = ∠DBA — по условию (углы при вершинах A и B).
4. ∠CBA = ∠DAB — по условию.

5. Сторона AB и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны стороне BA и двум прилежащим углам другого. По второму признаку $\triangle CAB = \triangle DBA$.
6. Следовательно, $AC = BD$ (соответственные стороны: AC лежит против $\angle CBA$, BD лежит против $\angle DAB$).

Ответ: доказано: $AC = BD$.

Задача 4. Дано: в $\triangle ABC$ $\angle B = \angle C$, BM — биссектриса $\angle B$, CN — биссектриса $\angle C$ (M на AC, N на AB). **Доказать:** $\triangle BNC = \triangle CMB$.

Решение.

1. Рассмотрим $\triangle BNC$ и $\triangle CMB$; у них общая сторона BC.
2. $BC = CB$ — общая.
3. $\angle NBC = \angle MCB$: ведь $\angle B = \angle C$, а биссектрисы делят их пополам, значит половинки равны ($\angle NBC = \angle B : 2 = \angle C : 2 = \angle MCB$).
4. $\angle NCB = \angle MBC$: это сами углы при основании? Нет — аккуратнее: $\angle NCB = \angle C$ (весь угол C, т.к. N на AB, и CN...). Возьмём проще: $\angle BCN$ относится к $\triangle BNC$ при вершине C. Используем: при стороне BC прилежащие углы — это $\angle NBC$, $\angle NCB$ у одного треугольника и $\angle MCB$, $\angle MBC$ у другого. $\angle NCB = \angle C$, $\angle MBC = \angle B$, и $\angle B = \angle C$, значит $\angle NCB = \angle MBC$.
5. Сторона BC и два прилежащих к ней угла равны соответственно. По второму признаку $\triangle BNC = \triangle CMB$. ∎

Ответ: доказано.

Задача 5. Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, BC — общая сторона двух треугольников ABC и DCB (см. рис.), где $\angle 1$, $\angle 3$ при вершине B, а $\angle 2$, $\angle 4$ при вершине C. **Доказать:** $AB = DC$.

Решение.

1. В $\triangle ABC$ и $\triangle DCB$: $BC = CB$ — общая сторона.
2. $\angle ABC = \angle DCB$ (углы $\angle 1 = \angle 2$ при концах B и C).
3. $\angle ACB = \angle DBC$ (углы $\angle 3 = \angle 4$ при концах C и B).
4. По второму признаку $\triangle ABC = \triangle DCB$.

5. Значит, AB = DC (соответственные стороны).

Ответ: доказано: AB = DC.

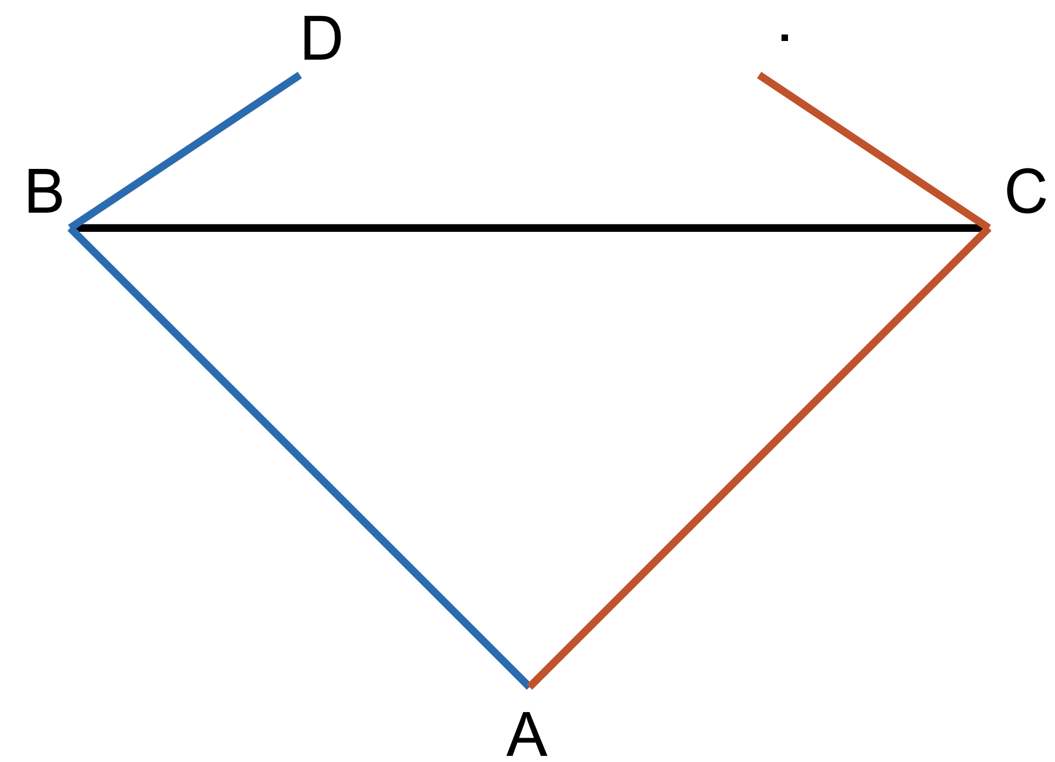

Рис. 3. BC общая; равные углы при B и при C (схема к задаче)

💡 Запомни главное

- **Второй признак:** сторона и **два прилежащих к ней угла** ⟹ треугольники равны.
- Прилежащие углы «сидят» на концах данной стороны.
- Идея доказательства: совместил стороны → углы направят боковые стороны по тем же лучам → вершины совпадут.
- Выбор признака: дано две стороны и угол между ними → первый; дано сторона и два угла на её концах → второй.

- Любой признак, доказав равенство, бесплатно даёт равенство всех остальных элементов.

📝 Домашнее задание

1. К какой стороне прилежат углы A и C в треугольнике ABC?
2. $\triangle ABC = \triangle MNP$, $AB = 9$ см, $\angle A = 40°$, $\angle B = 75°$. Найди MN, $\angle M$, $\angle N$.
3. Отрезки AB и CD пересекаются в середине O отрезка CD, и $\angle C = \angle D$. Докажи, что $AC = BD$.
4. В $\triangle ABC$ $\angle A = \angle B$. Из A и B провели лучи внутрь, образующие с AB равные углы и пересекающие стороны. Сформулируй, какой признак поможет доказать равенство получившихся треугольников.
5. Дано: $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle DBA = \angle CAB$, AB — общая. Докажи: $\triangle DAB = \triangle CBA$.
6. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Докажи, что $AB = A_1B_1$.
7. Можно ли применить второй признак, если известны сторона и два угла, но один из углов лежит против этой стороны (не прилегает к ней)? Почему?
8. ⭐ В равнобедренном $\triangle ABC$ ($AC = BC$) проведены биссектрисы AK и BL углов при основании. Докажи, что $AK = BL$. (Подсказка: рассмотри $\triangle ABK$ и $\triangle BAL$, используй равенство углов при основании и общую сторону AB.)