Урок 12. Третий признак равенства треугольников (по трём сторонам)

Геометрия, 7 класс · Гл. II, §2 · ~45 минут

🎯 Что ты узнаешь

- Почему трёх сторон достаточно, чтобы треугольник был «единственным».
- Как звучит и как доказывается **третий признак равенства** треугольников.
- Что такое **жёсткость треугольника** и почему мосты, краны и крыши собирают из треугольников, а не из квадратов.
- Научишься применять третий признак в задачах.

📖 Разбираемся в теме

Представь: ты строитель. У тебя есть три палочки заданной длины. Сколько разных треугольников можно из них сложить?

Попробуй мысленно (а лучше — реально, с тремя карандашами). Покрутишь, повертишь... и окажется, что треугольник получается **только один** (если не считать его зеркальные повороты). А вот из четырёх палочек квадрат запросто «складывается» в ромб — он шатается. Вот в этом вся соль сегодняшнего урока!

> 📏 **Теорема (третий признак равенства треугольников):** Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

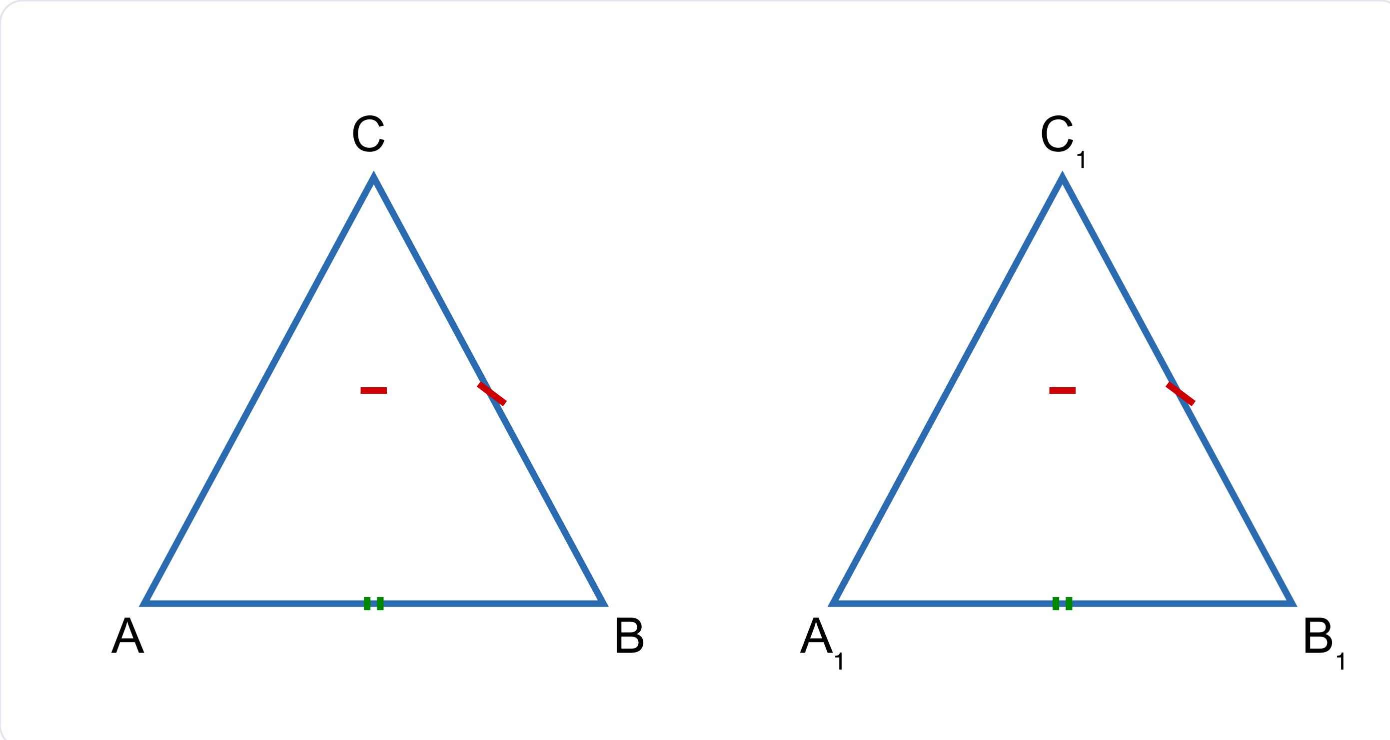

Рис. 1. $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ $\Longrightarrow$ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство — идея простыми словами.

Пусть у нас два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$.

Шаг 1. «Приложим» один треугольник к другому. Наложим $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ так, чтобы сторона A_1B_1 совпала с равной ей стороной AB (вершина A_1 совпала с A, B_1 — с B). Вершины C и C_1 при этом поставим по **разные** стороны от прямой AB.

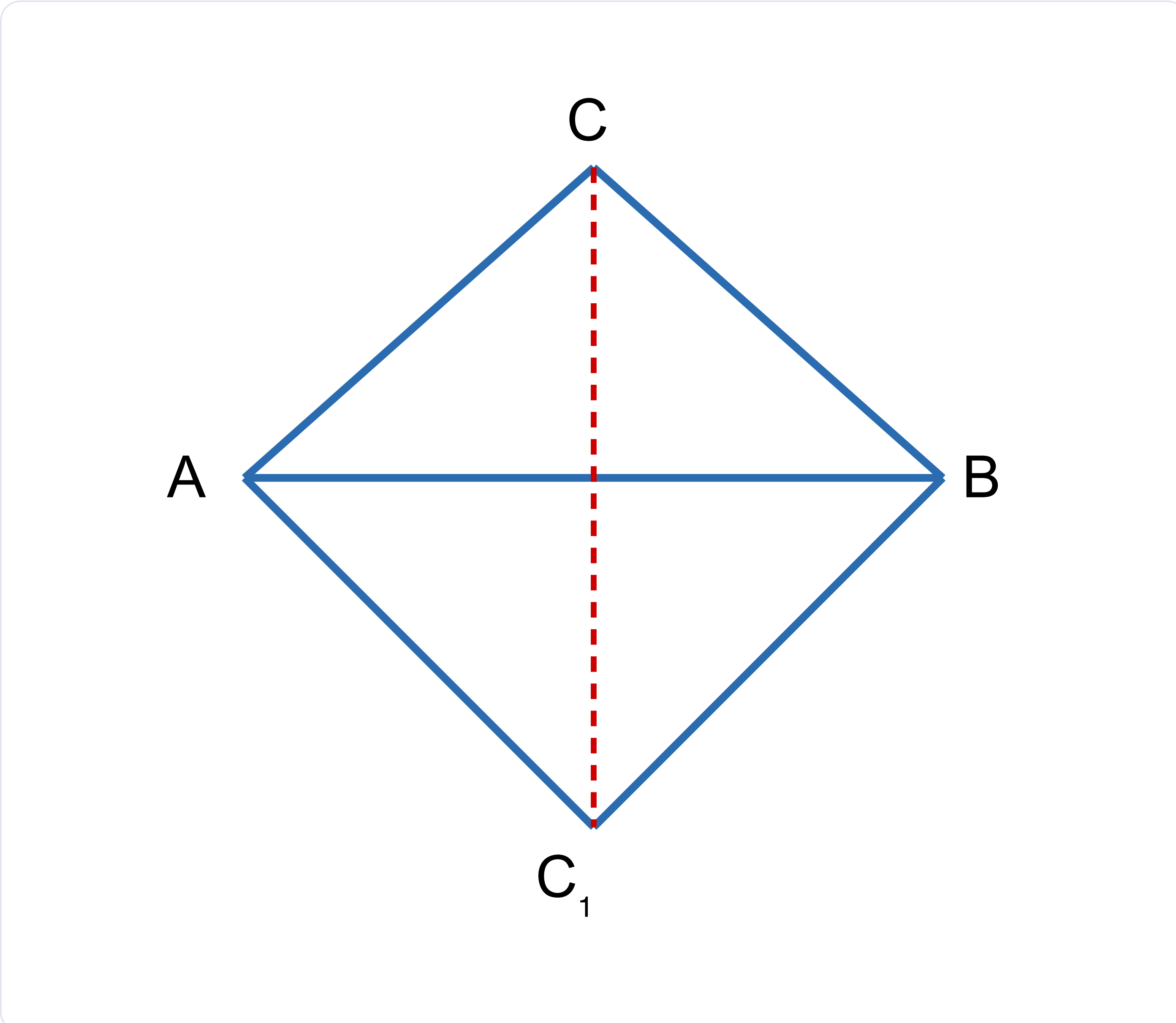

Рис. 2. Совмещаем сторону AB, точки C и C_1 — по разные стороны от прямой

Шаг 2. Проведём отрезок CC_1 — он пересекает прямую AB. Рассмотрим два треугольника, которые получились с этим отрезком.

Шаг 3. Так как $AC = AC_1$ (по условию), треугольник ACC_1 — **равнобедренный**. Значит, углы при его основании равны: $\angle ACC_1 = \angle AC_1C$. Точно так же $BC = BC_1$, и треугольник BCC_1 тоже равнобедренный: $\angle BCC_1 = \angle BC_1C$.

Шаг 4. Складывая равные углы, получаем $\angle ACB = \angle AC_1B$. То есть углы C и C_1 равны!

Шаг 5. Теперь у нас $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ и угол между ними $\angle C = \angle C_1$. А это — **первый признак** (по двум сторонам и углу между ними). Значит, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Что и требовалось доказать. ∎

💡 **Лайфхак:** Третий признак часто называют «SSS» (side-side-side, «сторона-сторона-сторона»). Первый — «SAS», второй — «ASA». Так их легче не путать.

⚠️ **Частая ошибка:** Нет признака «по трём углам»! Два треугольника могут иметь одинаковые углы, но быть разного размера (один большой, другой маленький — как фото и его уменьшенная копия). А вот три стороны размер задают жёстко.

Жёсткость треугольника

А теперь — самое практичное. Почему вокруг столько треугольников: в фермах мостов, в башенных кранах, в стропилах крыши, в велосипедной раме?

Потому что треугольник **жёсткий**. Если у тебя есть три стороны фиксированной длины, форма треугольника определена однозначно (это и есть третий признак!). Его нельзя «перекосить», не сломав и не согнув палочки.

А вот четырёхугольник из четырёх палочек, соединённых шарнирами, легко превращается из квадрата в скошенный ромб — он «гуляет».

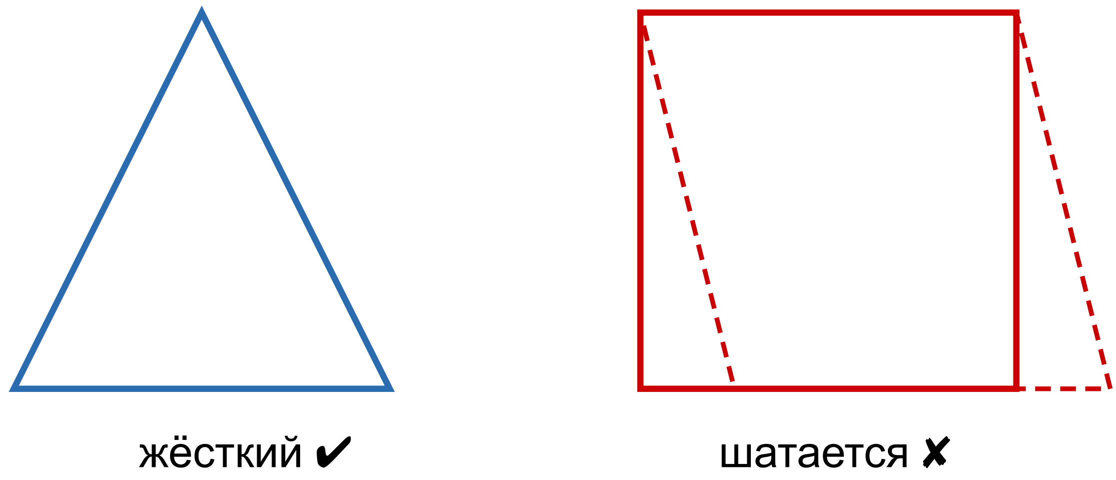

Рис. 3. Треугольник держит форму, четырёхугольник перекашивается

> 🤔 **А знаешь ли ты?** Если хочешь сделать жёстким деревянный ящик или калитку, которые «провисают», прибей одну диагональную планку. Она разобьёт прямоугольник на два треугольника — и конструкция перестанет шататься. Именно так укрепляют заборы и старые двери!

⏱ **Начерти сам:** возьми три отрезка длиной 4 см, 5 см и 6 см. Построй из них треугольник (как — узнаешь подробно в уроке 14, но попробуй уже сейчас, прикладывая линейку). Попроси соседа сделать то же. Сравните — треугольники окажутся равными!

✍ Разбор задач

Задача 1. Дано: AB = CD, BC = AD (рис. 4). **Доказать:** △ABC = △CDA.

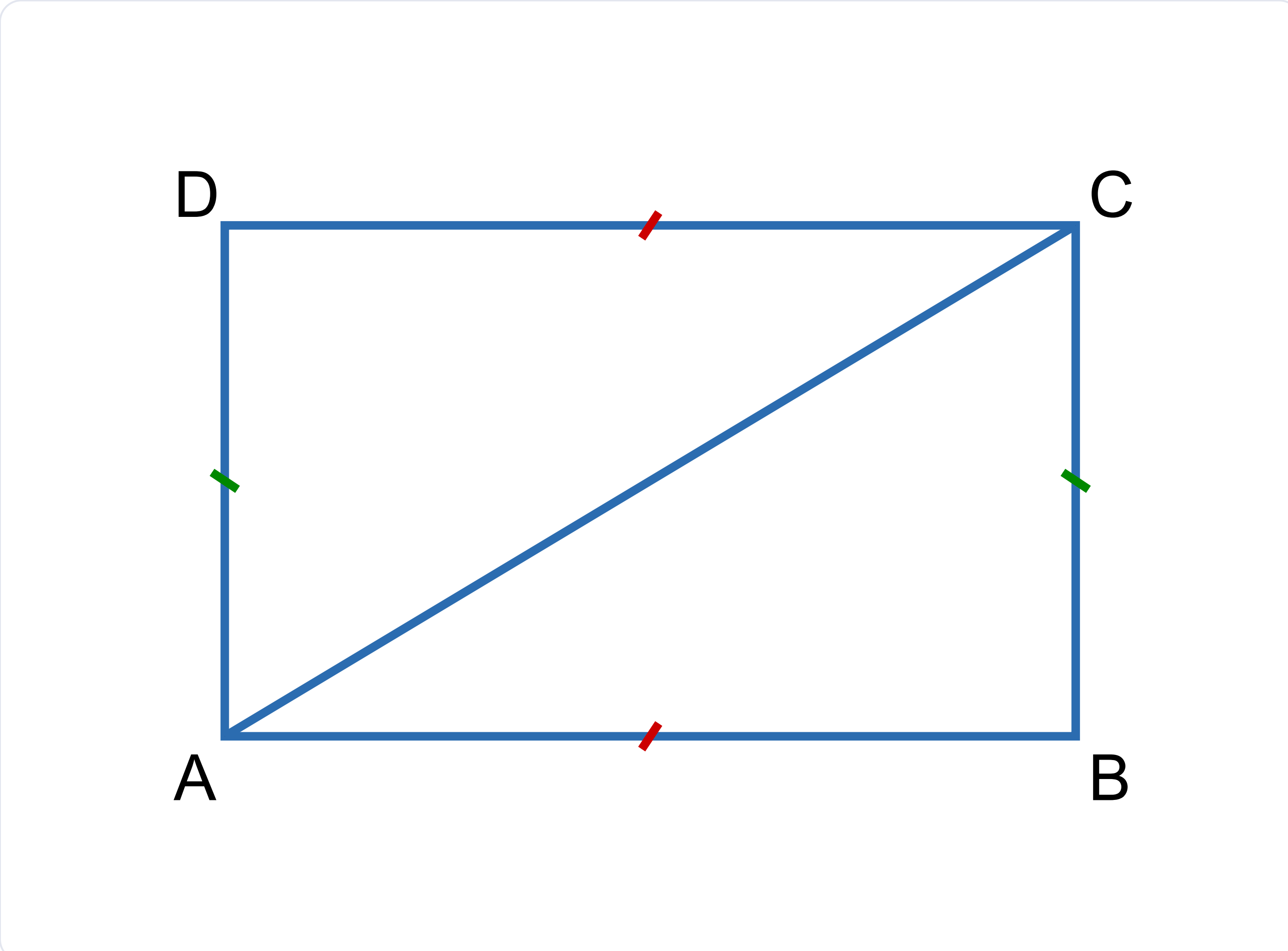

Рис. 4. К задаче 1

Решение.

1. AB = CD — по условию.
2. BC = DA — по условию.
3. AC — общая сторона обоих треугольников, значит AC = CA.
4. Итак, три стороны △ABC соответственно равны трём сторонам △CDA. По **третьему признаку** △ABC = △CDA. ∎

Ответ: доказано (по трём сторонам, общая сторона — AC).

Задача 2. Дано: AB = AC, BD = CD (точки B и C по разные стороны от прямой AD), рис. 5. **Доказать:** ∠B = ∠C.

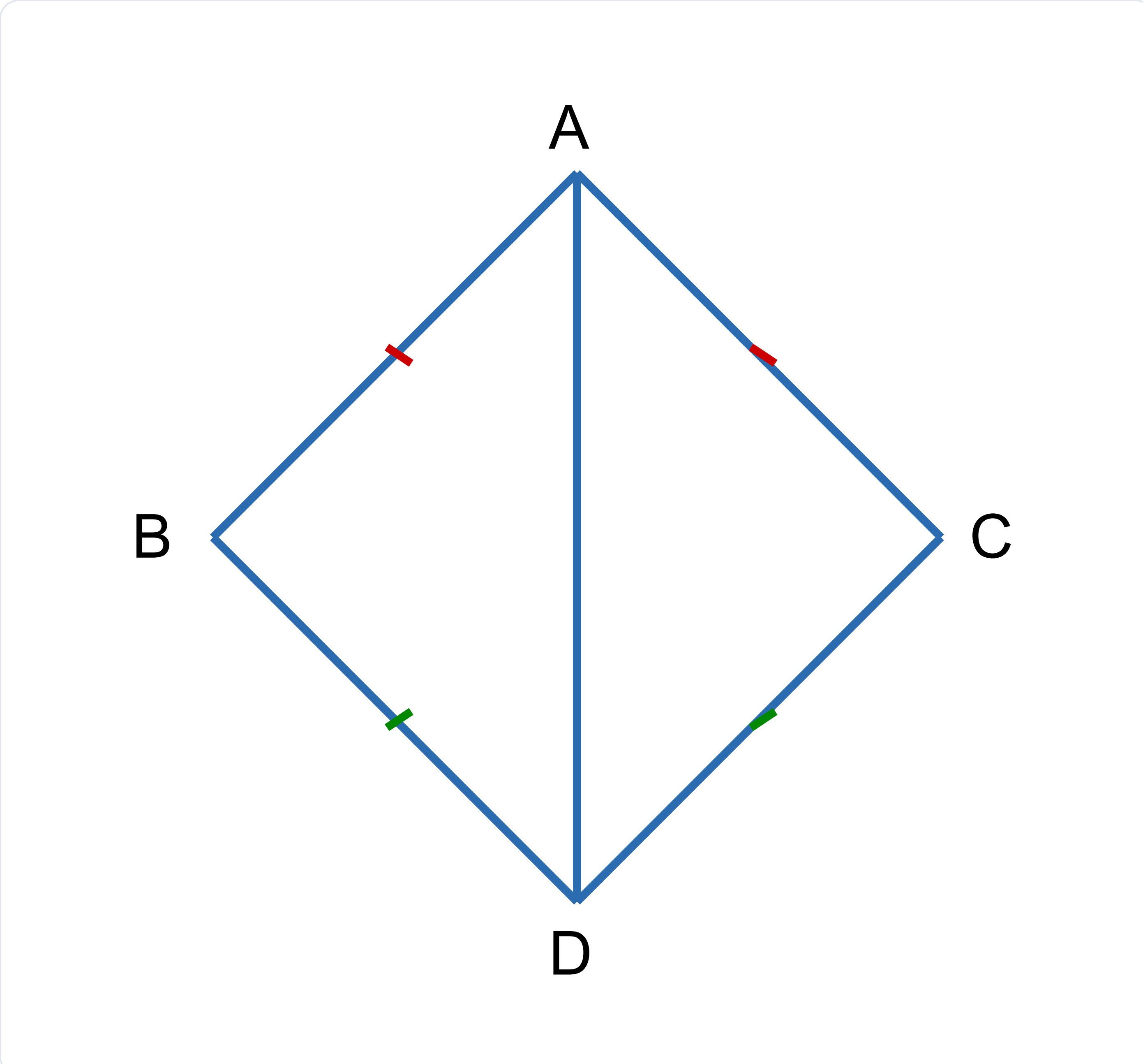

Рис. 5. К задаче 2

Решение.

1. AB = AC — по условию.
2. BD = CD — по условию.
3. AD — общая сторона: AD = AD.
4. По **третьему признаку** △ABD = △ACD.
5. В равных треугольниках соответственные углы равны, поэтому ∠B = ∠C. ∎

Ответ: доказано.

Задача 3. Дано: $\triangle MNP$ и $\triangle M_1N_1P_1$; $MN = 7$ см, $NP = 8$ см, $PM = 5$ см; $M_1N_1 = 7$ см, $N_1P_1 = 8$ см, $P_1M_1 = 5$ см. **Найти:** равны ли треугольники, и чему равен $\angle N_1$, если $\angle N = 73°$.

Решение.

1. Сравним стороны: $MN = M_1N_1 = 7$, $NP = N_1P_1 = 8$, $PM = P_1M_1 = 5$.
2. Три стороны соответственно равны $\Longrightarrow$ по третьему признаку $\triangle MNP = \triangle M_1N_1P_1$.
3. В равных треугольниках равны соответственные углы: $\angle N_1 = \angle N = 73°$.

Ответ: треугольники равны; $\angle N_1 = 73°$.

Задача 4. Дано: окружность с центром O; AB и CD — две хорды, причём $OA = OB = OC = OD$ (все радиусы), а также $AB = CD$ (рис. 6). **Доказать:** $\triangle OAB = \triangle OCD$.

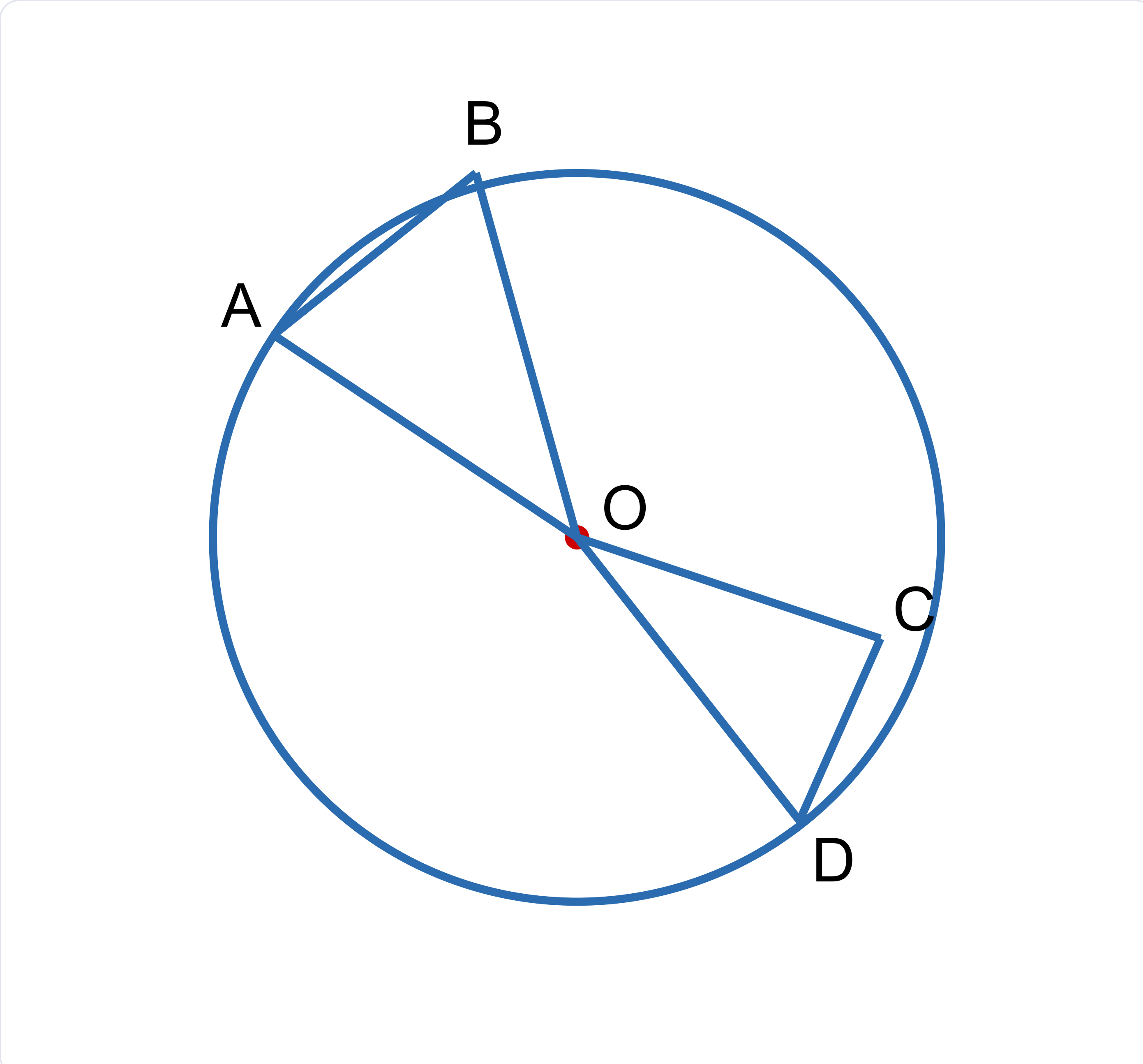

Рис. 6. К задаче 4

Решение.

1. OA = OC — радиусы одной окружности.
2. OB = OD — радиусы одной окружности.
3. AB = CD — по условию.
4. По **третьему признаку** △OAB = △OCD. ∎

Ответ: доказано (равны как радиусы + равные хорды по условию).

Задача 5. Дано: △ABC, в нём AB = BC (равнобедренный); точка M — середина AC (рис. 7). **Доказать:** ∠BMA = ∠BMC (то есть BM ⊥ AC).

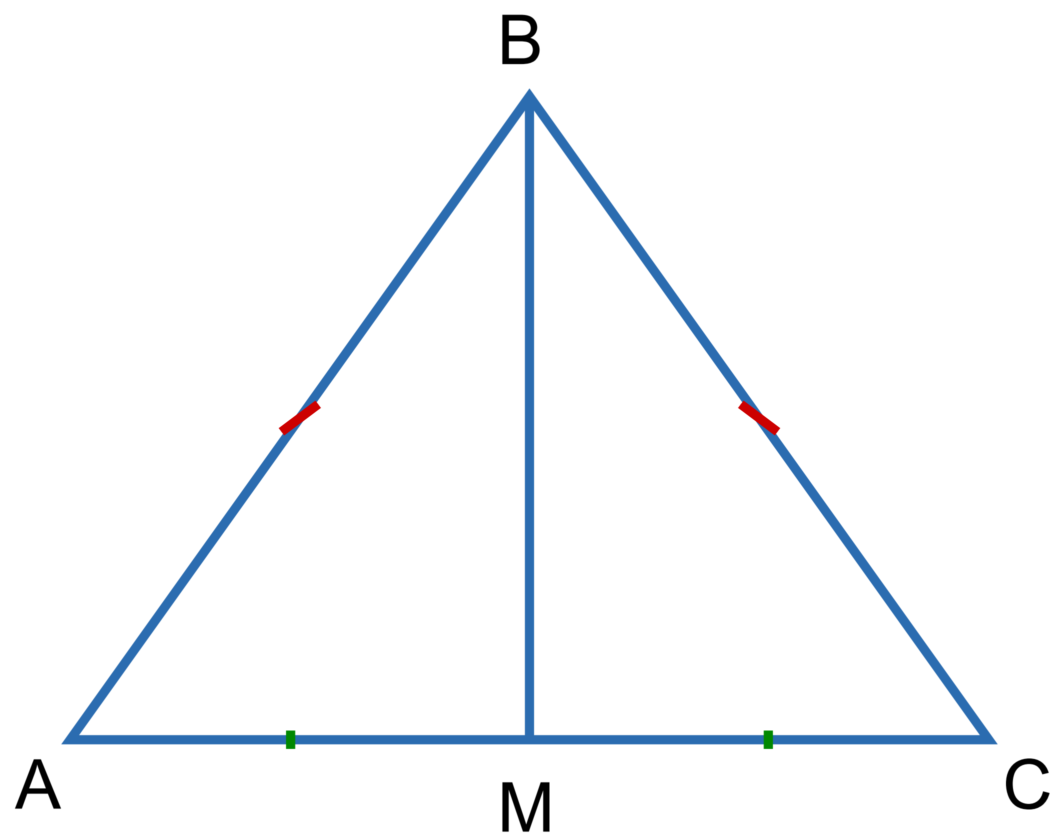

Рис. 7. К задаче 5

Решение.

1. AB = CB — по условию (равнобедренный).
2. AM = CM — M середина AC.
3. BM — общая сторона: BM = BM.
4. По **третьему признаку** △ABM = △CBM.
5. Значит ∠BMA = ∠BMC. А они смежные, то есть в сумме дают 180°. Если два смежных угла равны, каждый равен 90°. Поэтому BM ⊥ AC. ∎

Ответ: доказано; BM — высота (и перпендикуляр к AC).

💡 Запомни главное

- **Третий признак (SSS):** три стороны одного треугольника = три стороны другого $\Longrightarrow$ треугольники равны.
- Это значит: **три стороны однозначно задают треугольник** — отсюда **жёсткость**.
- Жёсткость треугольника — причина, по которой его используют в мостах, кранах, крышах, рамах.
- Признака «по трём углам» **не существует** — углы задают форму, но не размер.
- Частый приём в задачах: общая сторона + равенство по условию $\Longrightarrow$ применяем SSS.

📝 Домашнее задание

1. Сформулируй третий признак равенства треугольников своими словами.
2. Объясни на примере (рисунок приветствуется), почему четырёхугольник «шатается», а треугольник — нет.
3. У $\triangle ABC$ стороны 6, 9, 11 см; у $\triangle KLM$ стороны 11, 6, 9 см. Равны ли треугольники? Ответ обоснуй.
4. Дано: $AB = AD$, $CB = CD$. Докажи, что $\triangle ABC = \triangle ADC$.
5. Дано: M — середина отрезка AB; $PA = PB$. Докажи, что $PM \perp AB$.
6. В четырёхугольнике $ABCD$: $AB = CD$ и $BC = AD$. Докажи, что $\angle B = \angle D$.
7. Дано: $OA = OB$, $AC = BC$ (O и C по разные стороны от AB). Докажи, что OC — биссектриса угла AOB.
8. ⭐ Дано: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по трём сторонам). На стороне BC взята точка D, а на B_1C_1 — точка D_1 так, что $BD = B_1D_1$. Докажи, что $AD = A_1D_1$.