Урок 13. Окружность

Геометрия, 7 класс · Гл. II, §3 · ~45 минут

🎯 Что ты узнаешь

- Что такое **окружность** на самом деле (а не «такой круглый кружок»).
- Чем отличаются **окружность** и **круг** (да, это разные вещи!).
- Что такое **центр, радиус, диаметр, хорда, дуга**.
- Почему диаметр всегда вдвое длиннее радиуса.
- Где во всём этом прячется… коза на привязи 🐐.

📖 Разбираемся в теме

Привяжем козу верёвкой длиной 3 метра к колышку. Коза голодная и обойдёт всё, до чего дотянется. Какую границу выщипанной травы она оставит? Ровный круглый след — потому что в каждой точке этого следа коза находилась ровно в 3 метрах от колышка. Вот эта линия следа и есть **окружность**.

> 📐 **Определение: Окружность** — это линия (замкнутая кривая), состоящая из всех точек плоскости, которые находятся на одном и том же расстоянии от данной точки. Эта точка называется **центром** окружности.

То есть окружность — это «забор», а не «двор». Это именно линия.

> 📐 **Определение:** Часть плоскости, ограниченная окружностью (вся «лужайка» вместе с линией), называется **кругом**.

> ⚠️ **Частая ошибка:** Не путай! **Окружность** — это контур (линия). **Круг** — это вся площадь внутри. Колесо обода — окружность, а блин или монета — круг.

Радиус, диаметр, хорда

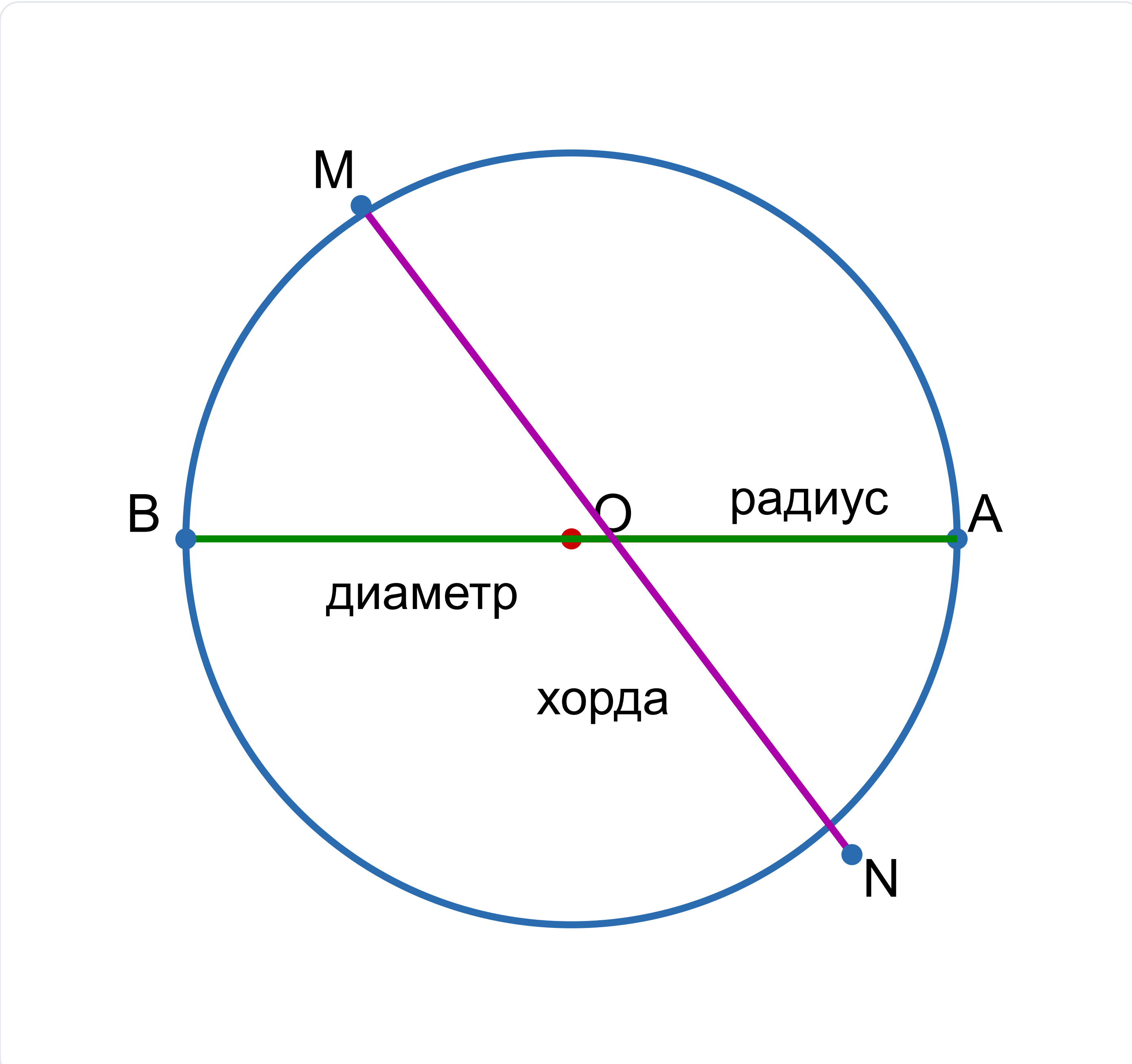

Рис. 1. Радиус OA, диаметр BA, хорда MN

> 📐 **Определение: Радиус** — это отрезок, соединяющий центр окружности с любой её точкой (а также длина этого отрезка). На рис. 1 это OA.

Все радиусы одной окружности равны между собой — ведь все точки окружности по определению на одинаковом расстоянии от центра!

📐 **Определение: Хорда** — это отрезок, соединяющий две любые точки окружности. На рис. 1 это MN.

📐 **Определение: Диаметр** — это хорда, проходящая через центр. На рис. 1 это BA. Диаметр — самая длинная хорда.

📏 **Свойство:** Диаметр равен двум радиусам: **d = 2r**. Почему? Диаметр состоит из двух радиусов (BO и OA), идущих из центра в противоположные стороны. BO = r, OA = r, значит BA = 2r.

💡 **Лайфхак:** Латинские буквы помогут запомнить: **r** — radius (радиус), **d** — diameter (диаметр), и d = 2r всегда.

⏱ **Начерти сам:** циркулем построй окружность радиусом 4 см. Проведи радиус, диаметр и какую-нибудь хорду, не проходящую через центр. Измерь хорду линейкой — она должна быть короче диаметра.

Дуга

Если поставить на окружности две точки, они разделят её на две части. Каждая такая часть — **дуга**.

📐 **Определение: Дуга** — это часть окружности, заключённая между двумя её точками.

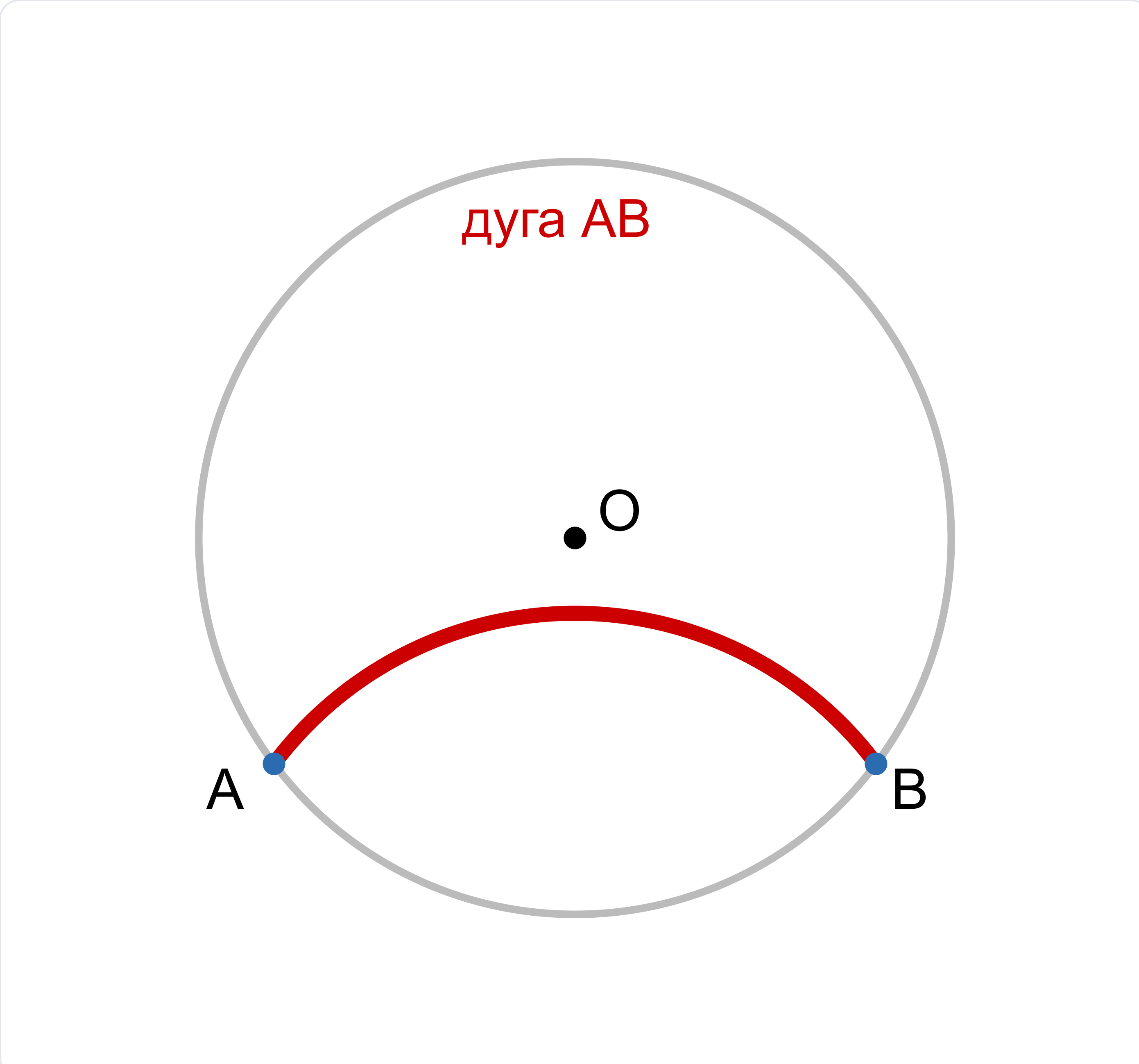

Рис. 2. Точки А и В делят окружность на две дуги (красным выделена одна из них)

Обозначают дугу значком ◡ : ◡AB. Когда точек А и В недостаточно, чтобы понять, о какой из двух дуг речь, добавляют промежуточную точку.

> 🤔 **А знаешь ли ты?** Слово «радиус» по-латыни значит «спица колеса» и «луч». Колесо телеги действительно отличная картинка: центр — ось, спицы — радиусы, обод — окружность.

Как построить окружность, проходящую через данную точку

Хочешь окружность с центром O, проходящую через точку P? Поставь ножку циркуля в O, раствори циркуль так, чтобы грифель попал в P (то есть раствор = OP), и крутани. Готово — все точки полученной линии в точности на расстоянии OP от центра.

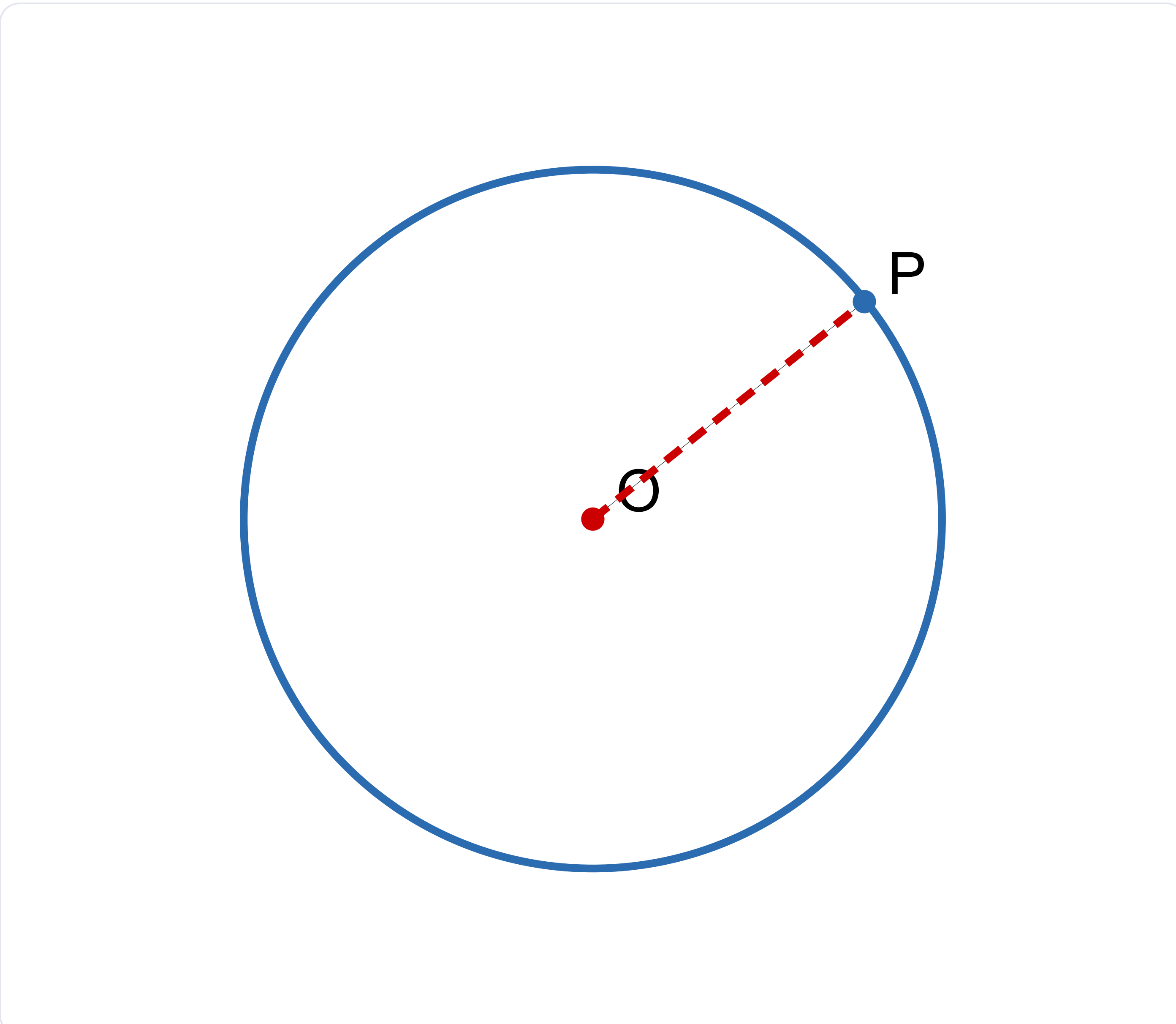

Рис. 3. Окружность с центром O радиусом OP

✍️ Разбор задач

Задача 1. Дано: окружность с центром O, радиус $r = 6$ см. **Найти:** диаметр d.

Решение. $d = 2r = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

Задача 2. Дано: диаметр окружности $d = 18$ см. **Найти:** радиус r.

Решение. Так как $d = 2r$, то $r = d : 2 = 18 : 2 = 9$ (см).

Ответ: 9 см.

Задача 3. Дано: окружность с центром O; A и B — точки окружности, причём $\angle AOB = 60°$ (рис. 4). **Доказать:** $\triangle AOB$ — равносторонний.

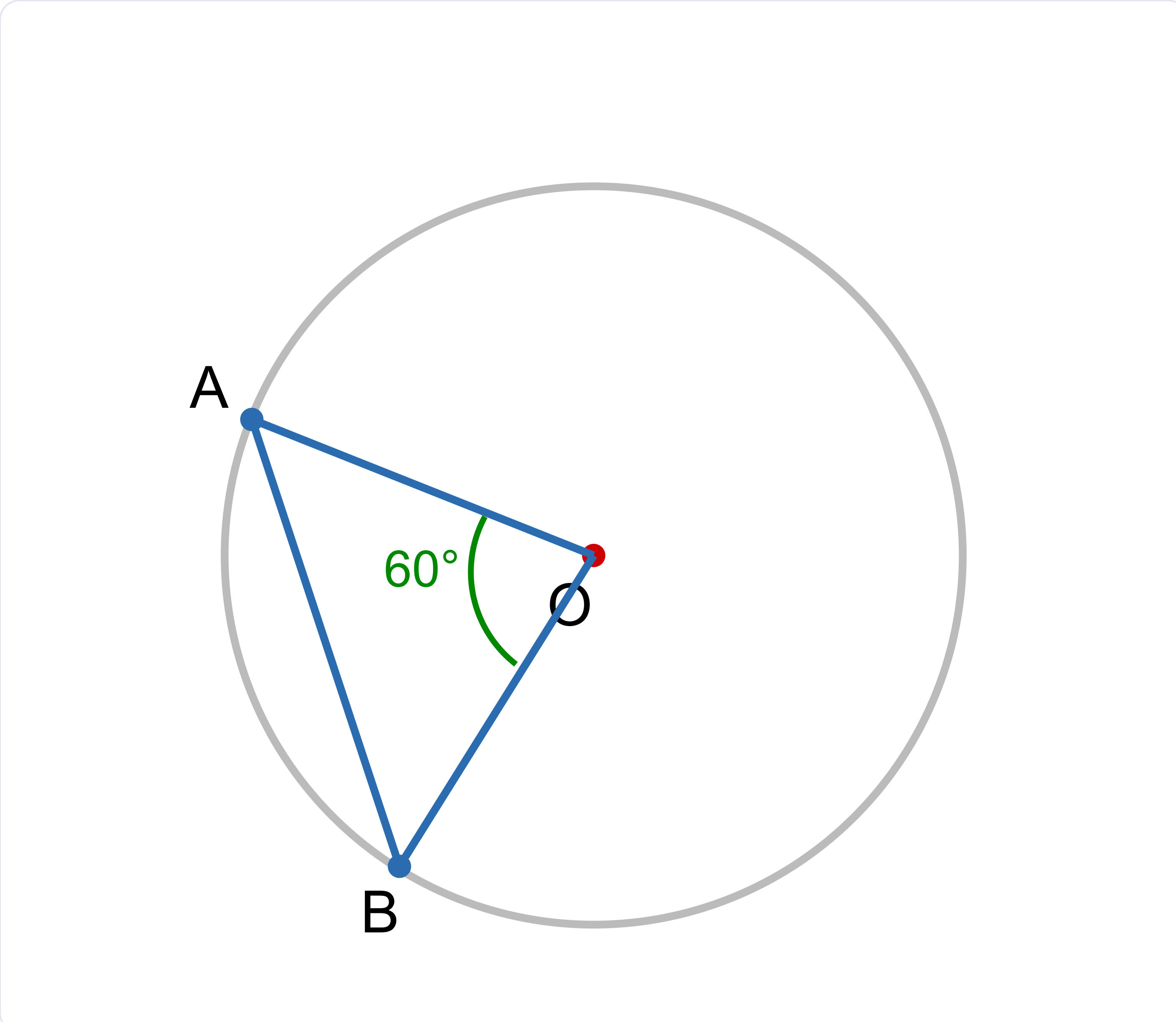

Рис. 4. К задаче 3

Решение.

1. OA = OB — это радиусы одной окружности, значит $\triangle AOB$ равнобедренный.
2. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны: $\angle OAB = \angle OBA$.
3. Сумма углов треугольника 180°, угол при вершине $\angle AOB = 60°$, значит на два угла при основании остаётся $180° - 60° = 120°$, по 60° каждый.
4. Все три угла по 60° $\Longrightarrow$ треугольник равносторонний. ∎

Ответ: доказано.

Задача 4. Дано: AB — диаметр окружности с центром O; C — точка окружности (рис. 5). **Доказать:** OC = OA = OB.

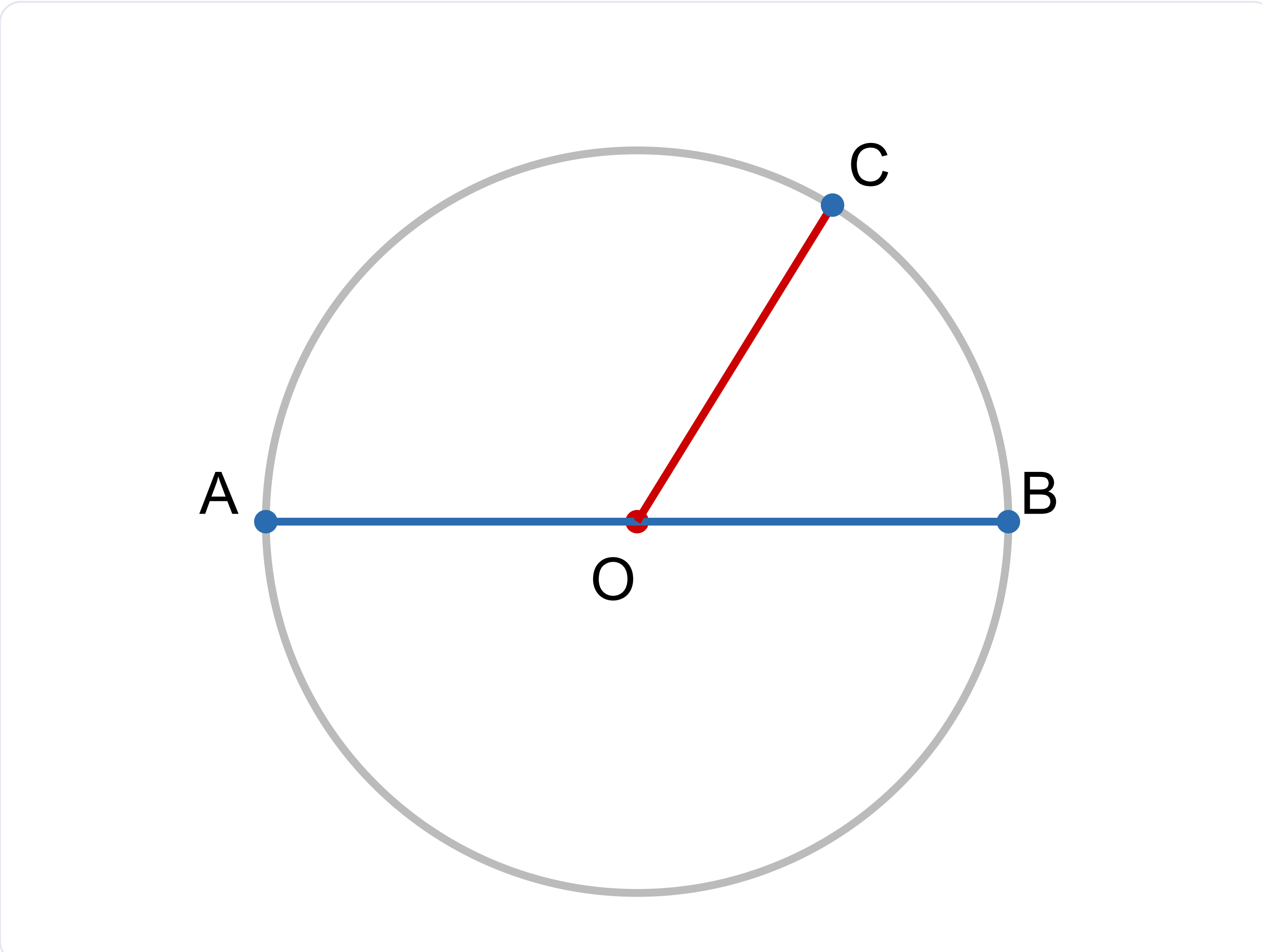

Рис. 5. К задаче 4

Решение.

1. A, B, C лежат на окружности, значит OA, OB, OC — радиусы.
2. Все радиусы одной окружности равны.
3. Поэтому OC = OA = OB. ∎

Ответ: доказано (все три отрезка — радиусы).

Задача 5. Дано: в окружности с центром O проведены две равные хорды AB и CD; M и N — их середины. Известно, что OA = OB = OC = OD = 5 см, AB = CD.

Найти: что можно сказать про треугольники OAB и OCD?

Решение.

1. OA = OC (радиусы), OB = OD (радиусы), AB = CD (по условию).
2. По третьему признаку равенства $\triangle OAB = \triangle OCD$.

Ответ: $\triangle OAB = \triangle OCD$ (по трём сторонам).

💡 Запомни главное

- **Окружность** — линия из всех точек на равном расстоянии от центра. **Круг** — площадь внутри неё.
- **Радиус (r)** — от центра до точки окружности; все радиусы равны.
- **Хорда** — отрезок между двумя точками окружности.
- **Диаметр (d)** — хорда через центр, самая длинная; **d = 2r**.
- **Дуга** — часть окружности между двумя точками.
- Главный приём в задачах: **радиусы одной окружности равны** — отсюда много равнобедренных треугольников.

📝 Домашнее задание

1. Дай определения: окружность, круг, радиус, хорда, диаметр, дуга.
2. Радиус окружности 7,5 см. Найди диаметр.
3. Диаметр окружности 24 см. Найди радиус.
4. Начерти окружность радиусом 3 см. Проведи два радиуса, диаметр и хорду, не проходящую через центр. Подпиши все элементы.
5. На окружности с центром O отмечены точки K и L так, что $\angle KOL = 90°$, OK = OL = 4 см. Какой это треугольник $\triangle KOL$? Найди его углы при основании.
6. AB — диаметр, C — точка окружности. Докажи, что $\triangle AOC$ равнобедренный.
7. В окружности проведены равные хорды PQ и RS. Докажи, что $\triangle OPQ = \triangle ORS$ (O — центр).

8. Сколько хорд можно провести через две данные точки окружности? А сколько диаметров можно провести в одной окружности?
9. ⭐ Две окружности равного радиуса с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Докажи, что $\triangle O_1AO_2 = \triangle O_1BO_2$.