Урок 14. Задачи на построение циркулем и линейкой

Геометрия, 7 класс · Гл. II, §3 · ~45 минут

🎯 Что ты узнаешь

- Какие инструменты разрешены в «честных» построениях и почему линейка — без делений.
- Как построить **отрезок, равный данному**.
- Как построить **угол, равный данному**.
- Как построить **биссектрису угла**.
- Как построить **середину отрезка** (серединный перпендикуляр).
- Как опустить/восставить **перпендикуляр к прямой**.

📖 Разбираемся в теме

Древние греки придумали забавное правило игры: строить фигуры можно только двумя инструментами — **циркулем** и **линейкой без делений**. Линейкой — проводить прямые через две точки. Циркулем — проводить окружности и откладывать одинаковые расстояния. И всё! Никаких «приложил линейку и отмерил 5 см».

Звучит как ограничение, но именно из этих простых действий собираются все классические построения. Это как конструктор: деталей мало, а собрать можно почти всё.

> 📐 **Определение: Задача на построение** считается решённой, если указано, как с помощью циркуля и линейки получить нужную фигуру, и доказано, что она и вправду такая, как требуется.

> 💡 **Лайфхак:** Главный секрет почти всех построений — циркулем мы переносим **равные расстояния**. А равные расстояния дают равные стороны треугольников ⟹ работают признаки равенства. Поэтому почти каждое доказательство построения сводится к «по трём сторонам».

1. Отрезок, равный данному

Задача. Дан отрезок PQ. Построить на луче с началом A отрезок, равный PQ.

Построение.

1. Измеряем циркулем отрезок PQ: ножку в P, грифель в Q (раствор = PQ).
2. Не меняя раствора, ставим ножку в A и проводим дугу, пересекающую луч в точке B.
3. AB — искомый отрезок: AB = PQ.

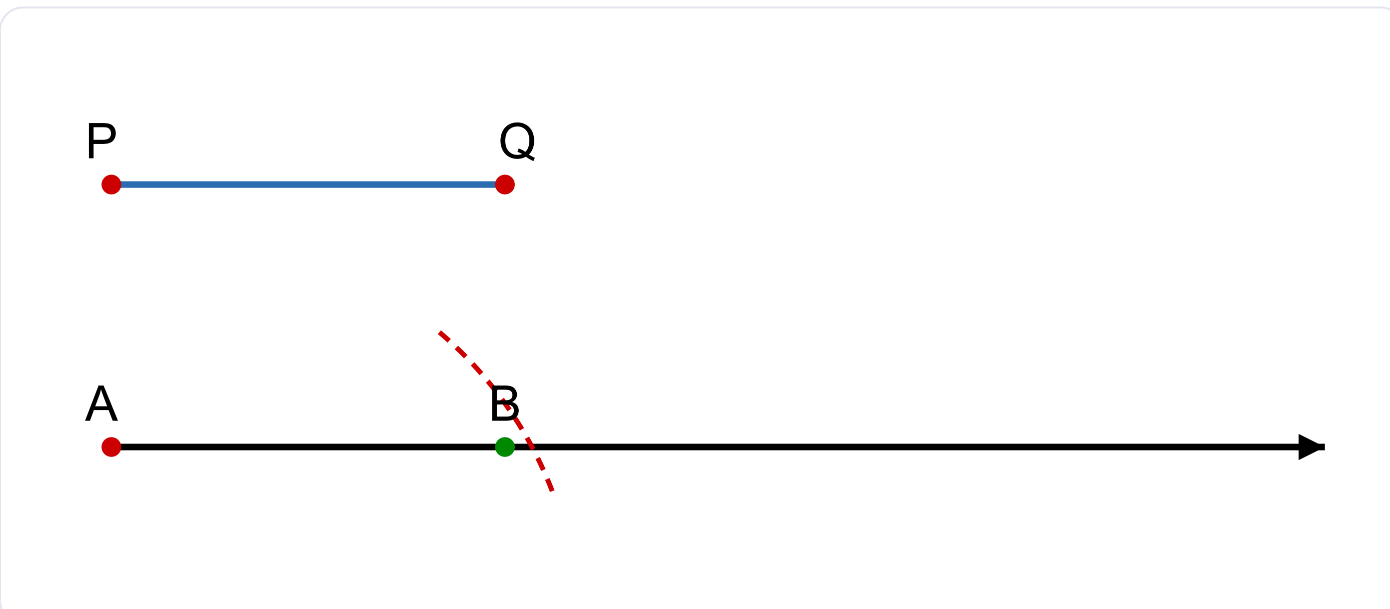

Рис. 1. Откладываем дугой раствор PQ от точки A — получаем AB = PQ

2. Угол, равный данному

Задача. Дан угол с вершиной O. Построить от данного луча (с началом A) угол, равный данному.

Построение.

1. Проведём дугу с центром O — она пересечёт стороны угла в точках C и D.
2. Тем же раствором проведём дугу с центром A — она пересечёт данный луч в точке E.
3. Измерим циркулем расстояние CD (раствор = хорде).
4. Дугой этого раствора с центром E засечём первую дугу — получим точку F.
5. Проведём луч AF. Угол ∠FAE равен данному углу.

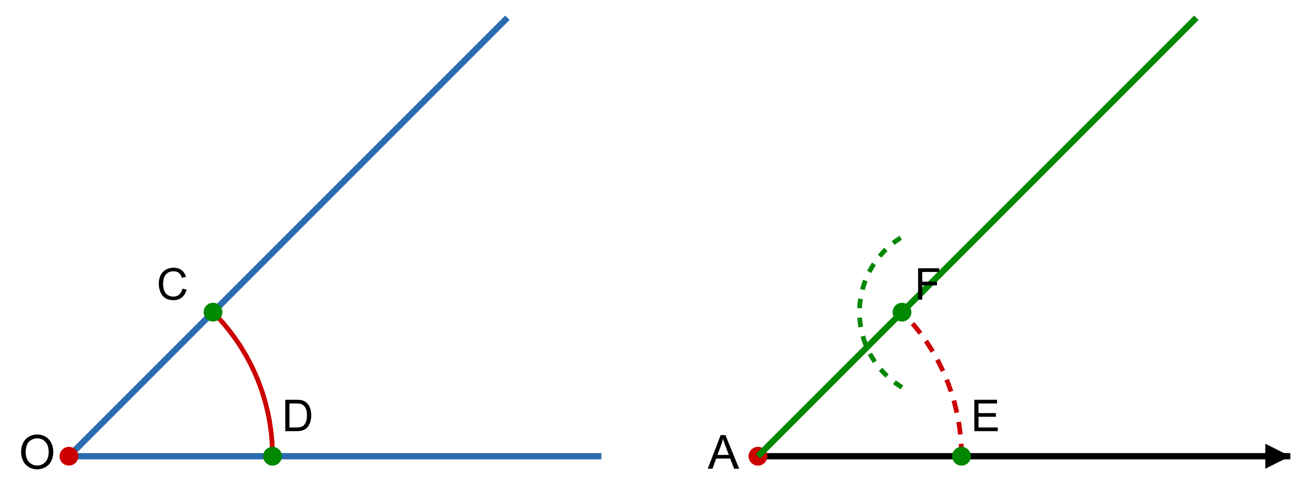

Рис. 2. Переносим дугой раствор CD — точка F задаёт равный угол

📏 **Почему работает.** Соединим C с D и E с F. Тогда OC = OD = AE = AF (одинаковый первый раствор) и CD = EF (одинаковый второй раствор). Значит △OCD = △AEF по трём сторонам, откуда ∠O = ∠A. ✔

3. Биссектриса угла

Задача. Дан угол с вершиной O. Построить его биссектрису (луч, делящий угол пополам).

Построение.

1. Проведём дугу с центром O — она пересечёт стороны в точках A и B.
2. Из A и из B одним и тем же раствором проведём две дуги внутри угла — они пересекутся в точке C.
3. Проведём луч OC. Это и есть биссектриса: ∠AOC = ∠BOC.

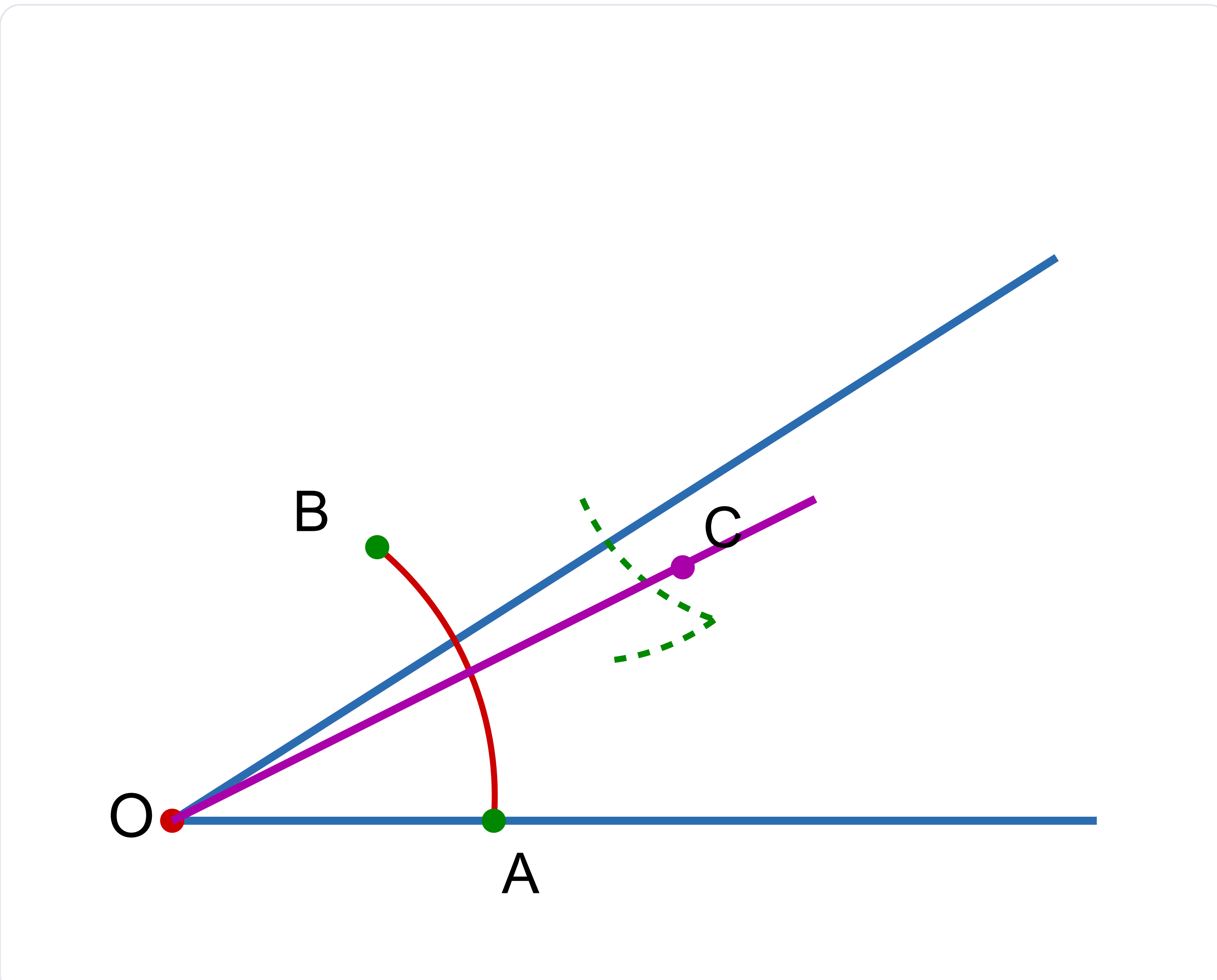

Рис. 3. Засечки из A и B пересекаются в C; OC — биссектриса

📏 **Почему работает.** $OA = OB$ (один раствор), $AC = BC$ (второй раствор), OC — общая $\Longrightarrow \triangle OAC = \triangle OBC$ по трём сторонам $\Longrightarrow \angle AOC = \angle BOC$. ✔

4. Середина отрезка (серединный перпендикуляр)

Задача. Дан отрезок AB. Найти его середину.

Построение.

1. Из точки A раствором, бóльшим половины AB, проведём дугу.
2. Из точки B тем же раствором проведём дугу — они пересекутся в двух точках P и Q (выше и ниже отрезка).
3. Проведём прямую PQ. Точка M её пересечения с AB — середина отрезка. А сама прямая $PQ \perp AB$ — это **серединный перпендикуляр**.

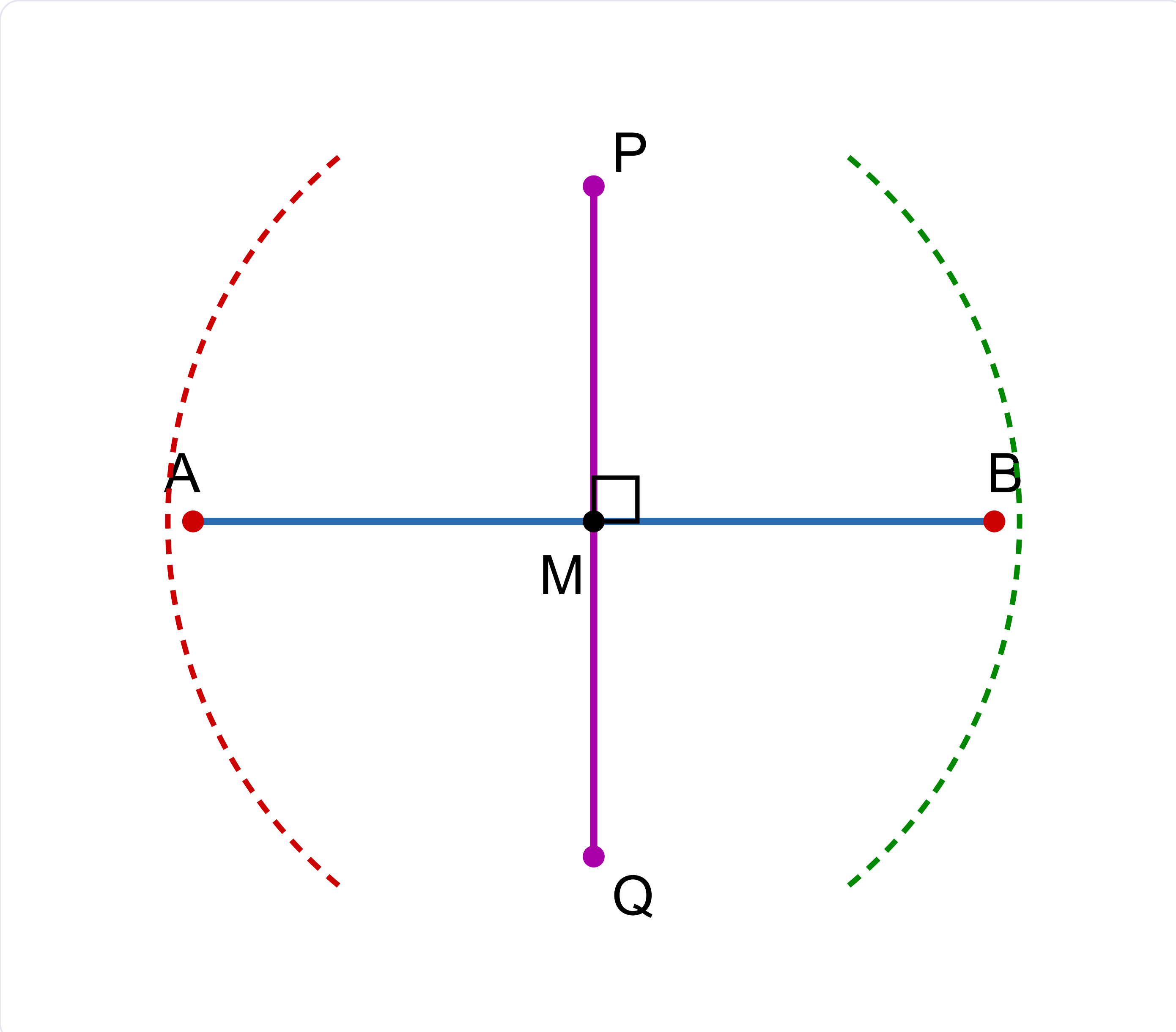

Рис. 4. Пересечения дуг P и Q дают серединный перпендикуляр PQ; M — середина AB

📏 **Почему работает.** AP = BP и AQ = BQ (одинаковые растворы) $\Longrightarrow$ $\triangle APQ = \triangle BPQ$ по трём сторонам $\Longrightarrow$ $\angle PAQ = \angle PBQ$... но проще: каждая точка прямой PQ одинаково удалена от A и B, поэтому PQ проходит через середину перпендикулярно отрезку.

⚠️ **Частая ошибка:** Раствор циркуля обязательно должен быть **больше половины AB**. Если он меньше — дуги не пересекутся и точек P, Q не будет.

5. Перпендикуляр к прямой

Задача (через точку на прямой). Дана прямая a и точка O на ней. Построить прямую, проходящую через O перпендикулярно a.

Построение.

1. От точки O в обе стороны вдоль прямой отложим равные отрезки: дугой одного раствора получим точки A и B (OA = OB).
2. Из A и B бóльшим раствором проведём две дуги — они пересекутся в точке C.
3. Прямая OC перпендикулярна a.

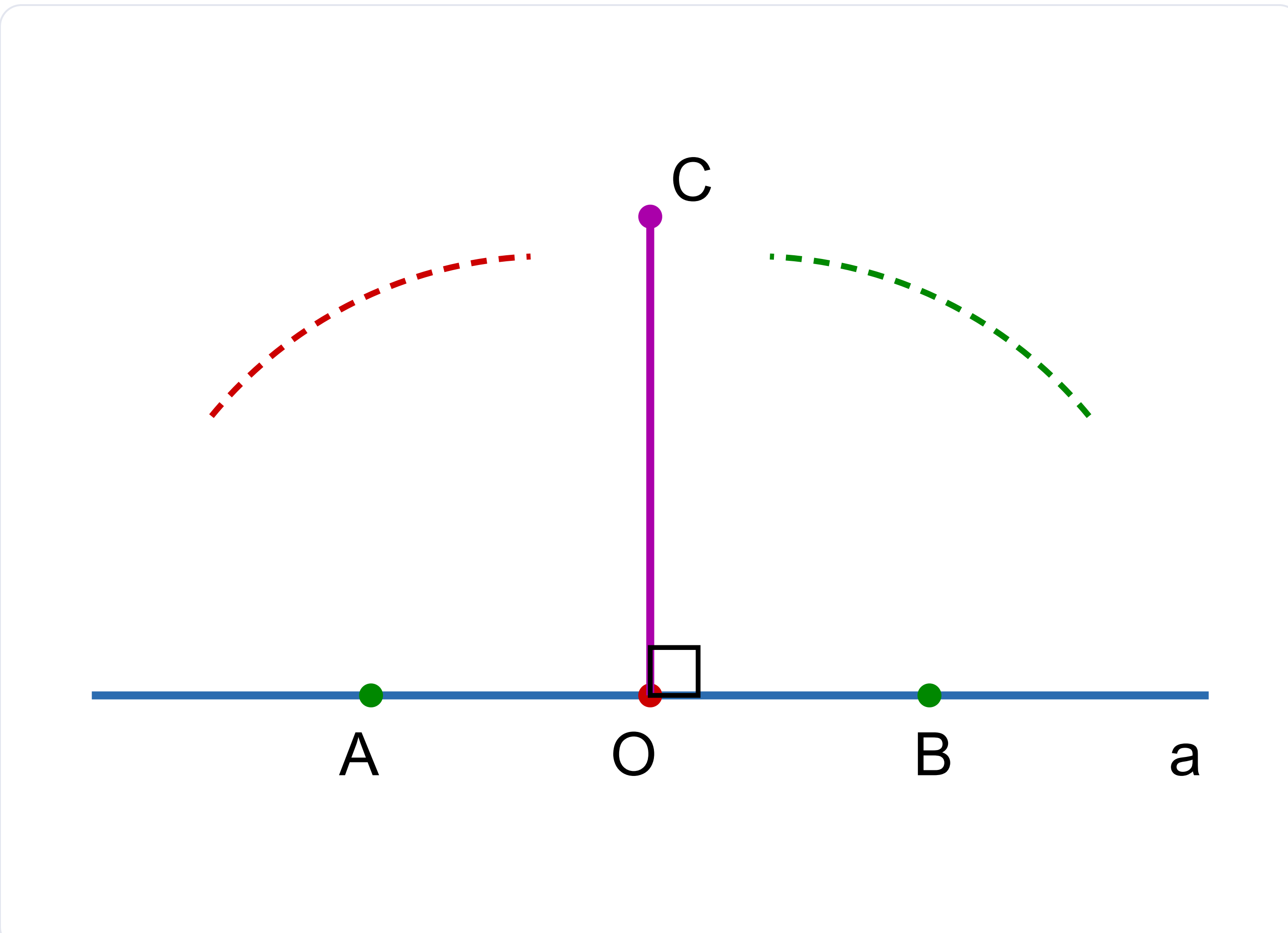

Рис. 5. OA = OB, засечки из A и B дают точку C; OC ⊥ a

📏 **Почему работает.** AC = BC, OA = OB, OC — общая ⟹ △AOC = △BOC по трём сторонам ⟹ ∠AOC = ∠BOC. Они смежные и равны, значит каждый по

$90° \implies OC \perp a$. ✔

⏱ **Построй сам:** начерти прямую и поставь на ней точку. Построй перпендикуляр через эту точку только циркулем и линейкой. Проверь угольником — должно быть ровно 90°.

🤔 **А знаешь ли ты?** Древние пытались тремя задачами «сломать» циркуль и линейку: разделить угол на три части, удвоить куб и построить квадрат, равный по площади кругу. Спустя 2000 лет математики доказали: этими инструментами такое в общем случае **невозможно**! Так что не мучайся, если трисекция угла не выходит — она и не должна.

✍ Разбор задач

Задача 1. Построить треугольник по трём сторонам a, b, c.

Решение.

1. Проведём прямую, отложим на ней отрезок $BC = a$ (построение 1).
2. Раствором, равным c, проведём дугу с центром B.
3. Раствором, равным b, проведём дугу с центром C.
4. Точка их пересечения — A. Соединим: $\triangle ABC$ искомый ($AB = c$, $AC = b$, $BC = a$).

Ответ: треугольник построен (опираемся на третий признак — он будет единственным).

Задача 2. Построить угол, равный 90°, не пользуясь транспортиром.

Решение. Берём прямую с точкой O и строим через неё перпендикуляр (построение 5). Угол между прямой и перпендикуляром равен 90°.

Ответ: искомый угол — между прямой и построенным перпендикуляром.

Задача 3. Дан острый угол. Построить угол, вдвое меньший данного.

Решение. Строим биссектрису данного угла (построение 3). Она делит угол пополам — каждая половина вдвое меньше исходного.

Ответ: любой из двух углов, на которые биссектриса делит данный.

Задача 4. Дан отрезок AB. Построить отрезок, равный его четверти.

Решение.

1. Построим середину M отрезка AB (построение 4) — получим $AM = AB/2$.
2. Построим середину отрезка AM тем же приёмом — получим четверть AB.

Ответ: отрезок от A до середины AM равен $AB/4$.

Задача 5. Дана прямая a и точка K вне её. Построить перпендикуляр из K на прямую a (опустить перпендикуляр).

Решение.

1. Из точки K проведём дугу так, чтобы она пересекла прямую a в двух точках — назовём их A и B ($KA = KB$).
2. Из A и B одинаковым раствором проведём дуги по другую сторону от прямой — они пересекутся в точке L.
3. Прямая KL — искомый перпендикуляр ($KA = KB$, $LA = LB \Longrightarrow KL \perp a$).

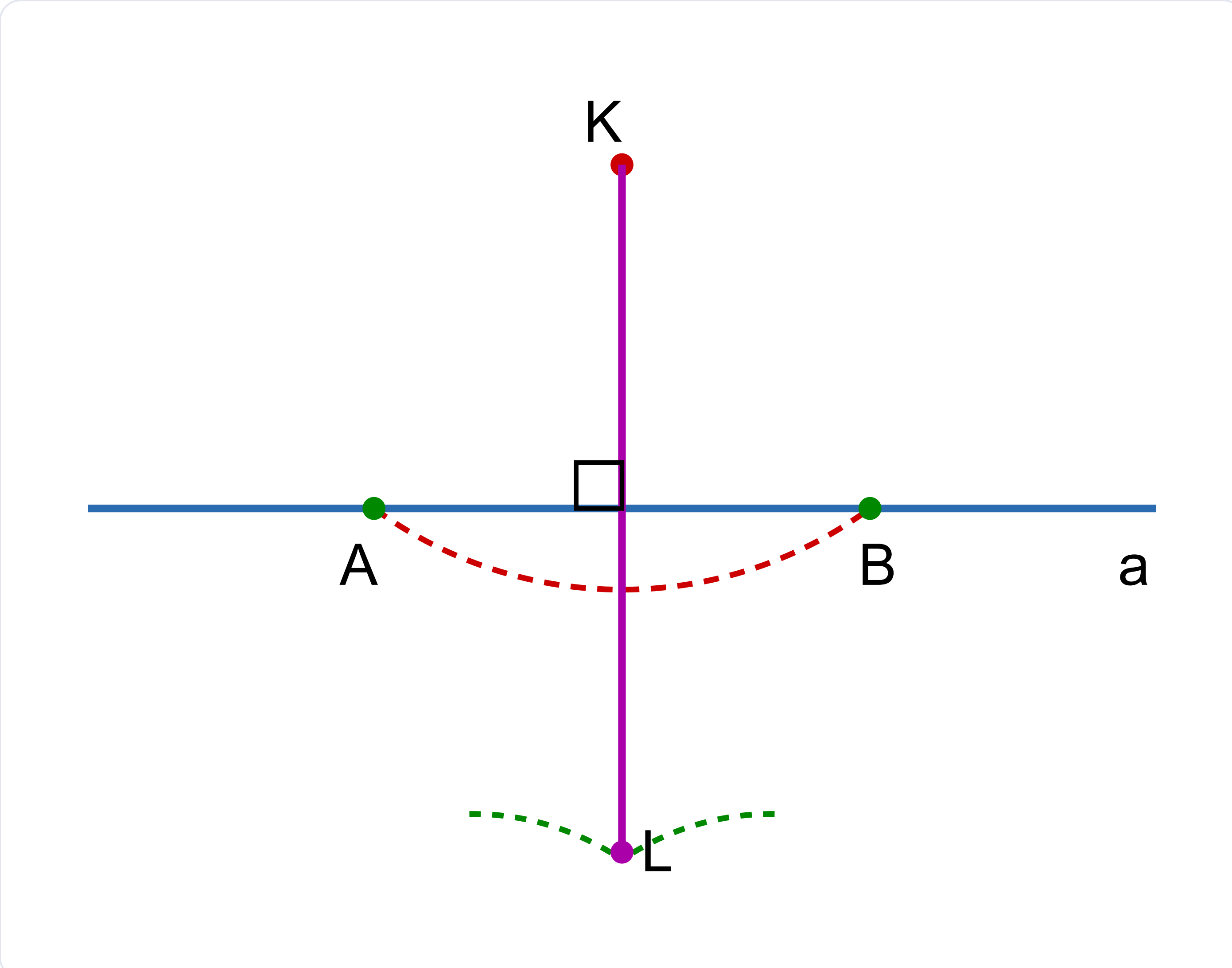

Рис. 6. Перпендикуляр из точки K на прямую a

Ответ: прямая KL ⊥ a — искомый перпендикуляр.

💡 Запомни главное

- Разрешено: циркуль (окружности, равные расстояния) и линейка **без делений** (прямые).
- **Отрезок, равный данному** — переносим раствор циркуля.
- **Угол, равный данному** — переносим две дуги; работает по третьему признаку.
- **Биссектриса** — дуга из вершины + две равные засечки из её концов.

- **Середина отрезка / серединный перпендикуляр** — две дуги равного (бо́льшего половины!) раствора из концов.
- **Перпендикуляр** — те же засечки, дающие равнобедренный треугольник; смежные равные углы по 90°.
- Почти все доказательства построений = **«по трём сторонам»**.

📝 Домашнее задание

1. Какими двумя инструментами разрешено выполнять классические построения и что каждым из них можно делать?
2. Построй отрезок, равный данному, и проверь равенство линейкой.
3. Начерти произвольный угол и построй равный ему угол от другого луча.
4. Построй биссектрису произвольного угла. Чем проверишь, что построил верно?
5. Построй середину данного отрезка. Назови, как одной прямой получить и середину, и перпендикуляр.
6. Начерти прямую и точку на ней. Построй перпендикуляр через эту точку.
7. Начерти прямую и точку вне её. Опусти перпендикуляр из точки на прямую.
8. Построй треугольник по трём сторонам 3 см, 4 см, 5 см. Какой угол получился у этого треугольника? Проверь угольником.
9. ⭐ Построй угол 45°, пользуясь только циркулем и линейкой. (Подсказка: сначала 90°, потом...)