

Урок 16. Аксиома параллельных прямых


Геометрия, 7 класс · Гл. III, §2 · ~45 минут

Что ты узнаешь

- Что такое **аксиома** и чем она отличается от теоремы.
- Главную аксиому этой главы — **аксиому параллельных прямых**.
- Два важных **следствия** из неё, которыми ты будешь пользоваться постоянно.
- Историю, из-за которой математики не спали ночами две тысячи лет.

Разбираемся в теме

В геометрии всё доказывается. Теорему про накрест лежащие углы — доказали. Признаки параллельности — доказали. Но подожди: а из чего вообще растут все доказательства? Не может же быть так, что всё доказывается из всего, по кругу. Должны быть какие-то самые-самые первые утверждения, которые принимают **без доказательства** — как фундамент дома. Вот они и называются аксиомами.

 **Определение: Аксиома** — это утверждение, которое принимается как исходное, **без доказательства**. На аксиомах строятся все остальные утверждения геометрии (теоремы).

Ты уже встречал аксиомы, даже не зная этого слова: «через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну»; «из двух точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими». Это всё — аксиомы.

Главная аксиома главы

Зададим вопрос: возьмём прямую **a** и точку **M**, которая на ней не лежит. Сколько прямых, проходящих через **M**, будут параллельны прямой **a**?

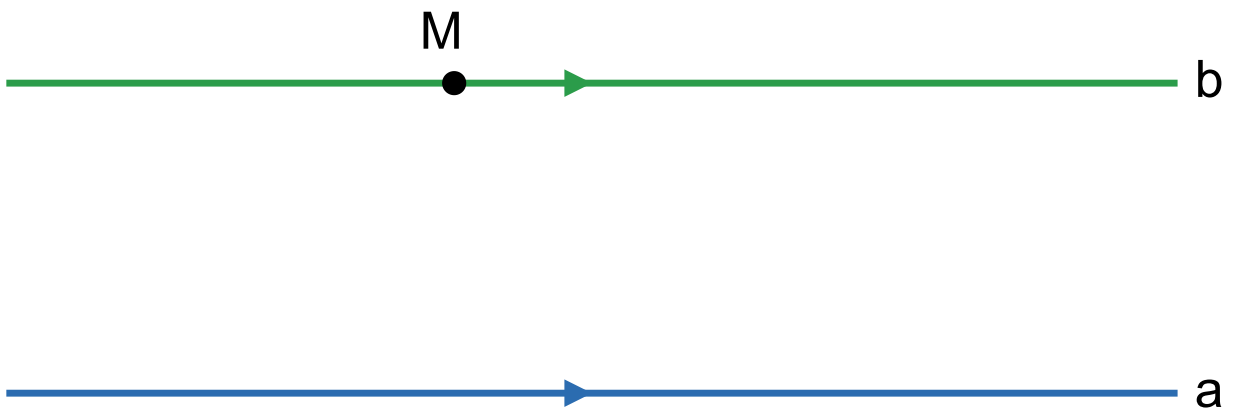


Рис. 1. Через точку M проходит единственная прямая b , параллельная a (галочки-стрелки — знак параллельности)

Ответ дала бы интуиция: одна. И это правда — но доказать это невозможно! Поэтому утверждение приняли как аксиому.

Аксиома параллельных прямых: Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит **только одна** прямая, параллельная данной.

То, что **хотя бы одна** такая прямая есть, доказать можно (через перпендикуляры или признаки). А вот что она **только одна** — это и есть содержание аксиомы.

Лайфхак: Запомни аксиому фразой: «**одна точка — одна параллельная**». Через точку вне прямой параллельную провести можно, и она единственная.

Следствия из аксиомы

Из аксиомы вытекают два очень полезных утверждения. Их называют **следствиями** — это теоремы, которые прямо вытекают из аксиомы или другой теоремы.

✎ **Следствие 1:** Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Почему: если бы она не пересекла вторую, то была бы ей параллельна — и тогда через их общую точку проходили бы две прямые, параллельные второй. А это нарушает аксиому. Противоречие!

✎ **Следствие 2:** Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой. (Если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$.)

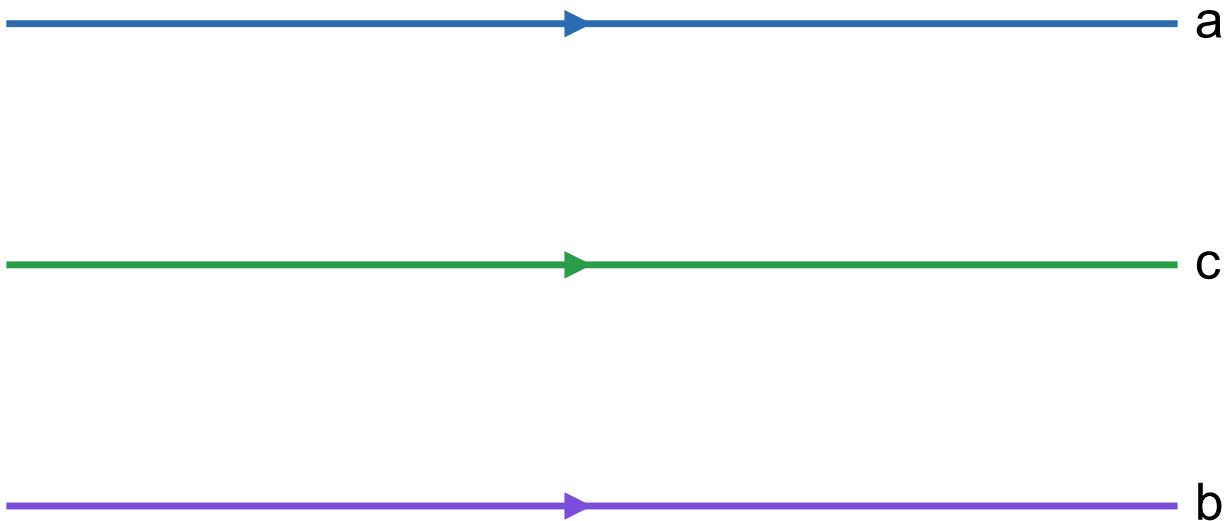


Рис. 2. Если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$

🕒 **Начерти сам:** Нарисуй прямую c и две прямые a и b , каждая параллельна c (галочки-стрелки одинаковые на всех трёх). Убедись на глаз, что a и b тоже параллельны.

🤔 **А знаешь ли ты?** Аксиома параллельных — самая знаменитая в истории математики. У Евклида (~300 г. до н.э.) это был **пятый постулат**. Он звучал сложнее, и больше **двух тысяч лет** математики пытались его **доказать** через остальные аксиомы — и не смогли. В XIX веке Николай Лобачевский, а также Бойяи и Гаусс сделали смелую вещь: предположили, что через точку можно провести **много** параллельных. Получилась странная, но непротиворечивая **неевклидова геометрия!** Оказалось, пятый постулат и правда нельзя доказать — он независим. А геометрия Лобачевского позже пригодилась физике (теория относительности!). Вот что бывает, когда смело меняешь одну аксиому.

Разбор задач

Задача 1. Дано: прямые a и b параллельны; прямая c пересекает прямую a .

Доказать: прямая c пересекает и прямую b . *Решение.*

1. Это прямое применение **следствия 1**.
2. Если бы c не пересекала b , то $c \parallel b$. Тогда через точку пересечения c и a проходили бы две прямые (a и c), параллельные b — нарушение аксиомы.
3. Значит, c обязана пересечь b . **Ответ:** c пересекает b , что и требовалось доказать.

Задача 2. Дано: $a \parallel m$ и $b \parallel m$. **Доказать:** $a \parallel b$. *Решение.*

1. По **следствию 2**: две прямые, параллельные одной и той же прямой m , параллельны между собой.
2. Значит, $a \parallel b$. **Ответ:** $a \parallel b$.

Задача 3. Дано: через точку M , не лежащую на прямой a , провели прямую $b \parallel a$. Сосед утверждает, что провёл ещё одну прямую через M , тоже параллельную a .

Найти: прав ли сосед. *Решение.*

1. По **аксиоме параллельных** через точку вне прямой проходит только **одна** прямая, параллельная данной.
2. Значит, вторая «параллельная» совпадает с первой — новой быть не может.

Ответ: сосед не прав: такая прямая единственна.

Задача 4. Дано: прямые p и q обе параллельны прямой t , причём p и q различны.

Найти: могут ли p и q пересекаться. *Решение.*

1. По следствию 2 $p \parallel q$.
2. Параллельные прямые не пересекаются. **Ответ:** нет, не могут — они параллельны.

Задача 5. Дано: прямая l параллельна одной стороне треугольника и проходит через вершину, не лежащую на этой стороне. **Найти:** сколько таких прямых можно провести через эту вершину. *Решение.*

1. Вершина — это точка, не лежащая на данной стороне (на прямой, её содержащей).
2. По аксиоме параллельных через точку вне прямой параллельная **единственна**. **Ответ:** ровно одна.



Запомни главное

- **Аксиома** — утверждение, принимаемое без доказательства; фундамент геометрии.
- **Аксиома параллельных:** через точку вне прямой проходит **только одна** прямая, параллельная данной.
- **Следствие 1:** прямая, пересекающая одну из двух параллельных, пересекает и другую.

- **Следствие 2:** две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.
 - Пятый постулат Евклида две тысячи лет пытались доказать — и не смогли; так родилась геометрия Лобачевского.
-



Домашнее задание

1. Что такое аксиома? Чем она отличается от теоремы? Приведи пример аксиомы.
 2. Сформулируй аксиому параллельных прямых.
 3. Сформулируй два следствия из аксиомы.
 4. Прямые m и n параллельны, прямая k пересекает m . Пересекает ли k прямую n ? Почему?
 5. Известно, что $x \parallel z$ и $y \parallel z$. Что можно сказать про прямые x и y ?
 6. Через точку, не лежащую на прямой a , провели прямую, параллельную a . Сколько ещё параллельных a прямых можно провести через эту же точку?
 7. Объясни, почему «через точку вне прямой проходит хотя бы одна параллельная» можно доказать, а «только одна» — нет.
 8. ★ Кто и в каком веке построил неевклидову геометрию, изменив пятый постулат? Напиши 2–3 предложения, что в этой геометрии устроено иначе.
-