

Урок 18. Теорема о сумме углов треугольника

Геометрия, 7 класс · Гл. IV, §1 учебника Атанасяна · ~45 минут


Что ты узнаешь

- Чему равна сумма всех трёх углов любого треугольника — и почему это всегда так.
- Как доказать эту теорему с помощью одной хитрой параллельной прямой.
- Как по двум известным углам мгновенно находить третий.
- Какие бывают треугольники по углам: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный.

Разбираемся в теме

Возьми любой треугольник — крошечный или огромный, узкий или широкий, хоть нарисуй его сам как попало. А теперь представь фокус: вырежи его из бумаги, оторви все три уголка и сложи их вершинами в одну точку. Что получится?

Получится... ровная прямая линия! Уголки сложатся в развёрнутый угол. А развёрнутый угол — это **180°**. И так будет с *любым* треугольником, который ты нарисуешь. Это не совпадение, а закон геометрии.

 Начерти сам: нарисуй на бумаге треугольник, вырежи его, оторви три угла и приложи их друг к другу вершинами. Убедись, что вместе они дают прямую линию.

 **Теорема:** Сумма углов треугольника равна 180° .

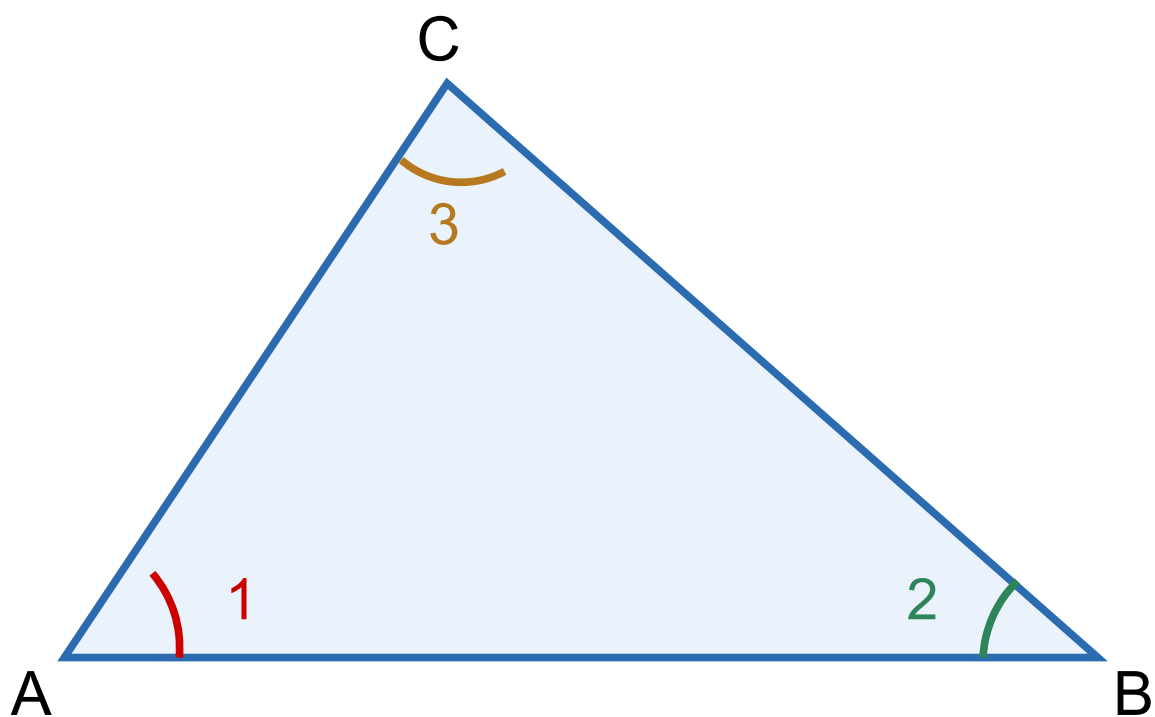


Рис. 1. Углы 1, 2 и 3 треугольника ABC в сумме дают 180°

Доказательство — с помощью параллельной прямой

Фокус с бумагой — это здорово, но геометры так не доказывают: нужны строгие рассуждения. И тут нам поможет один умный приём.

Проведём через вершину C прямую, **параллельную** стороне AB. Назовём её *a*. Теперь у вершины C собрались сразу три угла, которые вместе образуют развёрнутый угол (то есть 180°): два «новых» по краям и наш угол 3 посередине.

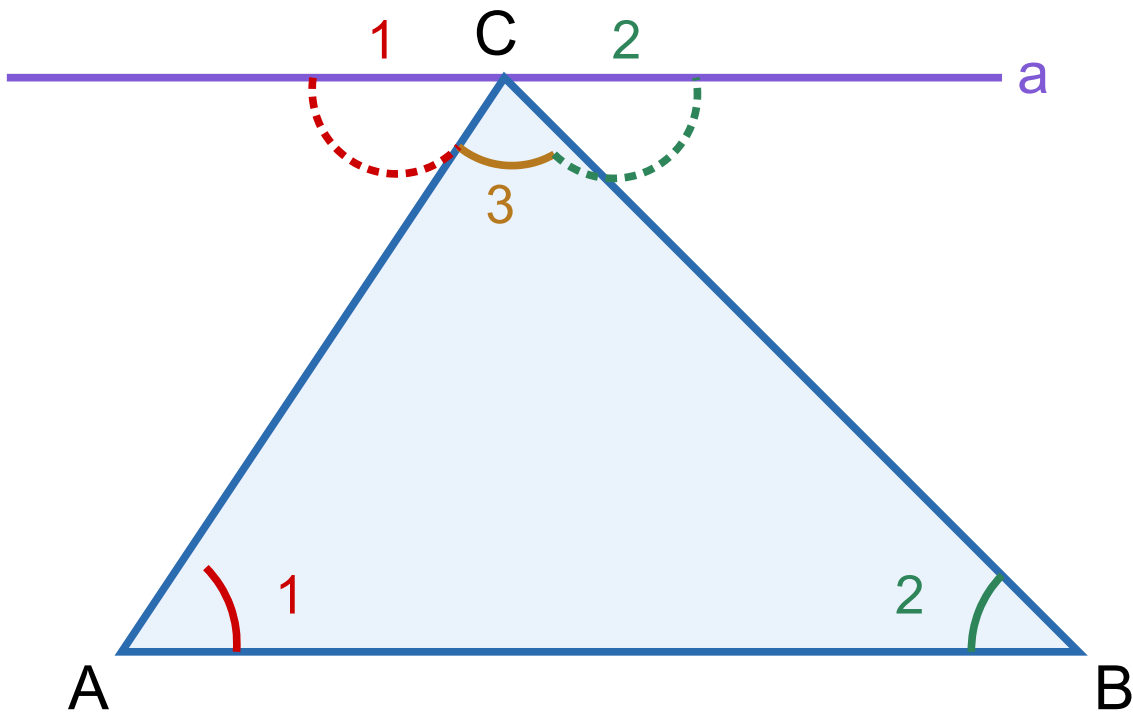


Рис. 2. Прямая $a \parallel AB$ проведена через вершину C


Теперь вспоминаем накрест лежащие углы при параллельных прямых (это мы проходили в главе о параллельных прямых):

1. $AB \parallel a$, а сторона AC — секущая. Тогда **угол 1** = «новому» левому углу при вершине C (накрест лежащие углы равны).
2. $AB \parallel a$, а сторона BC — секущая. Тогда **угол 2** = «новому» правому углу при вершине C .
3. Три угла при вершине C лежат на прямой a и вместе составляют развёрнутый угол: «левый» + угол 3 + «правый» = 180° .

Заменяем «левый» на угол 1, а «правый» на угол 2 и получаем:


угол 1 + угол 3 + угол 2 = 180° .


А это и есть сумма углов треугольника! Что и требовалось доказать. ■

 **Лайфхак:** Запомни число **180** — это «бюджет» углов любого треугольника. Сколько ни перекраивай треугольник, сумма углов всегда ровно 180° , ни градусом больше.

Самое полезное следствие


Если ты знаешь два угла треугольника — третий находится одним вычитанием:

 **Следствие:** Если два угла треугольника равны α и β , то третий угол равен $180^\circ - \alpha - \beta$.

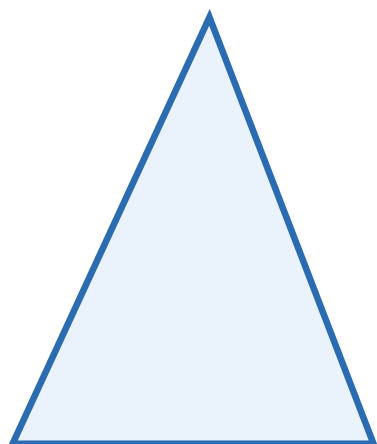
 **Частая ошибка:** Не существует треугольника с двумя прямыми углами ($90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, и на третий угол уже ничего не остаётся — он был бы 0°). И тем более не бывает двух тупых углов в одном треугольнике.

Виды треугольников по углам

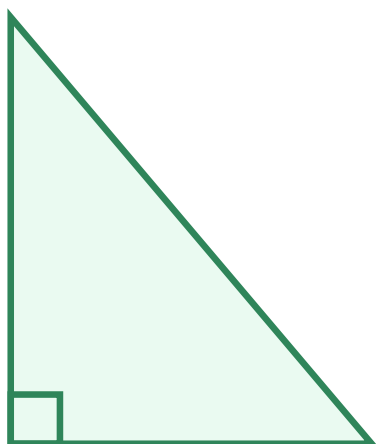
Раз «бюджет» равен 180° , посмотрим, как треугольник может его «потратить».

 **Определение:**

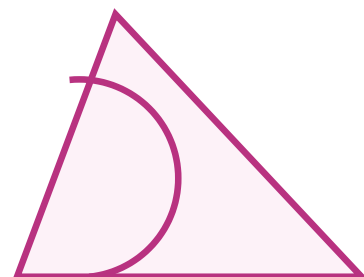
- **Остроугольный** треугольник — все три угла острые (меньше 90°).
- **Прямоугольный** треугольник — один угол прямой (равен 90°).
- **Тупоугольный** треугольник — один угол тупой (больше 90°).



остро-



прямо-



тупо-

Рис. 3. Три вида треугольников по углам

🤔 **А знаешь ли ты?** Правило «сумма углов = 180° » работает только на плоскости! На поверхности шара (например, на глобусе Земли) сумма углов треугольника **больше** 180° . Геометрию на искривлённых поверхностях придумали в XIX веке, и именно она помогла Эйнштейну описать притяжение и космос. Так что наш простой треугольник — дверь в большую науку.

Разбор задач

Задача 1. Два угла треугольника равны 50° и 70° . Найди третий угол.

Дано: $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. **Найти:** $\angle C$.

Решение. Сумма углов треугольника равна 180° , значит: $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

Задача 2. В треугольнике все углы равны. Найди каждый из них.

Дано: $\angle A = \angle B = \angle C$. **Найти:** величину каждого угла.

Решение. Пусть каждый угол равен x . Тогда $x + x + x = 180^\circ$, то есть $3x = 180^\circ$, откуда $x = 60^\circ$.

Ответ: каждый угол равен 60° (это равносторонний треугольник).

Задача 3. В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 35° . Найди второй острый угол.

Дано: $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 35^\circ$. **Найти:** $\angle B$.

Решение. Сумма всех углов 180° , один из них 90° . Значит, на два острых угла остаётся $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Тогда $\angle B = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

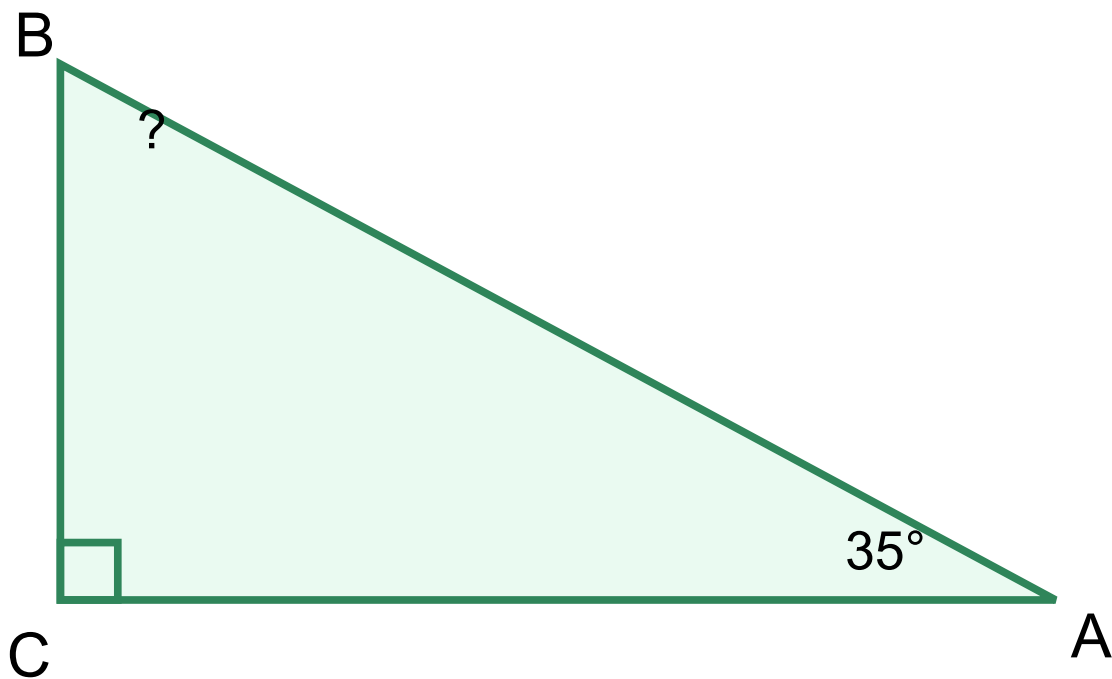


Рис. 4. Прямоугольный треугольник с острым углом 35°

Ответ: 55° .

Задача 4. Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 4$. Найди эти углы.

Дано: $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$. **Найти:** $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Решение. Пусть одна «часть» равна x . Тогда углы равны $2x$, $3x$ и $4x$. Их сумма 180° : $2x + 3x + 4x = 180^\circ$, то есть $9x = 180^\circ$, откуда $x = 20^\circ$. Тогда $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 80^\circ$.

Проверка: $40 + 60 + 80 = 180$. \checkmark Все углы острые — треугольник остроугольный.

Ответ: 40° , 60° , 80° .

Задача 5. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 100° . Найди углы при основании.

Дано: треугольник равнобедренный, угол при вершине $\angle C = 100^\circ$. **Найти:** углы при основании $\angle A$ и $\angle B$.

Решение. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны: $\angle A = \angle B$. На них вместе остаётся $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. Значит, каждый: $80^\circ \div 2 = 40^\circ$.

Ответ: по 40° .

Задача 6. Может ли существовать треугольник с углами 80° , 60° и 50° ?

Дано: три угла 80° , 60° , 50° . **Найти:** существует ли такой треугольник.

Решение. Проверим сумму: $80^\circ + 60^\circ + 50^\circ = 190^\circ$. Это больше 180° , а у треугольника сумма углов строго равна 180° . Значит, такого треугольника нет.

Ответ: не существует (сумма углов $190^\circ \neq 180^\circ$).



Запомни главное

- Сумма углов любого треугольника равна 180° .
- Доказательство: проводим через вершину прямую, параллельную противоположной стороне, и используем накрест лежащие углы.
- Третий угол = $180^\circ -$ (сумма двух других).
- В прямоугольном треугольнике два острых угла дают в сумме 90° .
- По углам: остроугольный (все $< 90^\circ$), прямоугольный (один = 90°), тупоугольный (один $> 90^\circ$).



Домашнее задание

1. Два угла треугольника равны 45° и 65° . Найди третий.
2. Найди углы треугольника, если они равны и треугольник равносторонний (объясни ход).
3. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 28° . Найди второй острый угол.

4. Один угол треугольника 90° , другой 47° . Какой треугольник по углам? Найди третий угол.
5. Углы треугольника относятся как $1 : 2 : 3$. Найди их. Какой это треугольник по углам?
6. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 70° . Найди угол при вершине.
7. Может ли треугольник иметь два тупых угла? Объясни.
8. В треугольнике $\angle A$ в два раза больше $\angle B$, а $\angle C = 60^\circ$. Найди $\angle A$ и $\angle B$.
9. ★ В треугольнике ABC $\angle A = 40^\circ$. Биссектриса угла B и биссектриса угла C пересекаются в точке O . Найди угол BOC . (Подсказка: сначала найди $\angle B + \angle C$, потом половины этих углов.)