

Урок 20. Соотношения между сторонами и углами треугольника

Геометрия, 7 класс · Гл. IV, §2 учебника Атанасяна · ~45 минут

Что ты узнаешь


- Главное правило: против большей стороны лежит больший угол — и наоборот.
- Как по сторонам мгновенно расставить углы по «росту» (и обратно).
- Почему в прямоугольном треугольнике гипотенуза — самая длинная сторона.
- Признак равнобедренного треугольника: если два угла равны, то и стороны против них равны.

Разбираемся в теме

Посмотри на любой треугольник и спроси себя: где у него самый «широкий» угол? Подсказка: напротив самой длинной стороны. А самый «узкий» уголок? Напротив самой короткой стороны. Звучит логично — и это настоящий закон геометрии.

Представь, что стороны — это распахнутые «ножки» циркуля, а угол между другими сторонами — это насколько широко циркуль раскрыт напротив. Чем длиннее сторона напротив угла, тем шире сам угол должен «раскрыться», чтобы её достать.

 **Теорема 1:** В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

 **Теорема 2 (обратная):** В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Запомни, какая сторона какому углу «принадлежит»: сторона *лежит против* угла, если она его не касается. Сторона BC лежит против угла A , сторона AC — против угла B , сторона AB — против угла C .

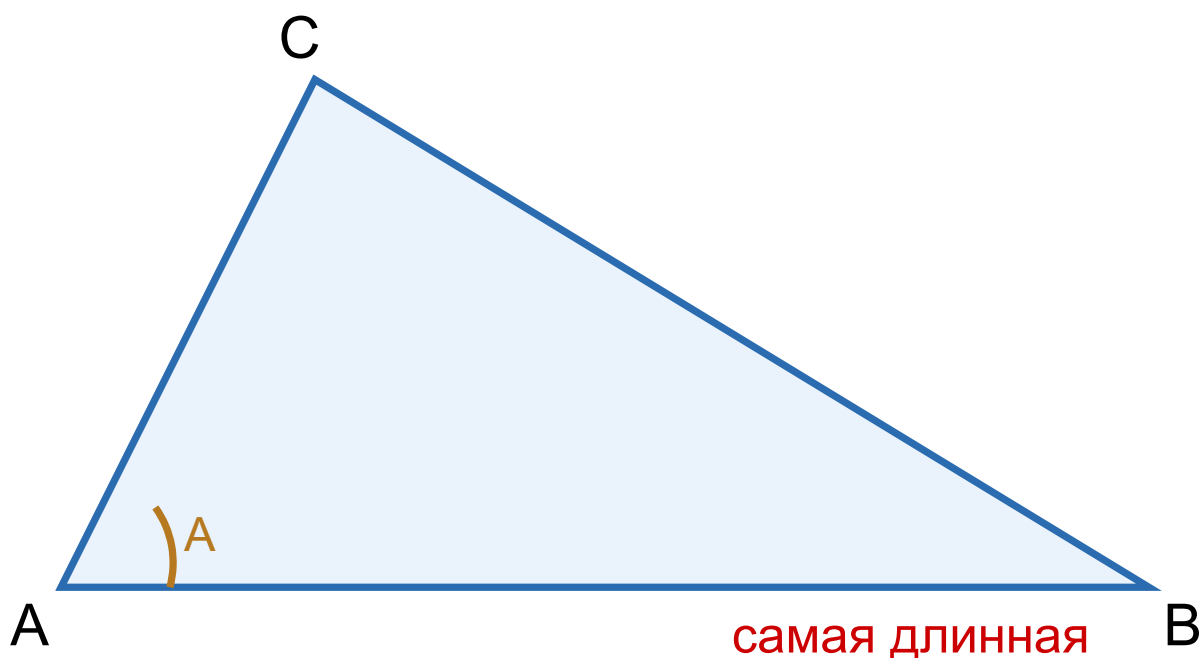


Рис. 1. Против большей стороны AB лежит больший угол C


💡 Лайфхак: «Большой стороне — большой угол, маленькой — маленький». Стороны и углы стоят парами и идут «в ногу»: переставишь стороны по росту — углы выстроятся точно так же.

Как доказать первую теорему (в двух словах)

Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC . Отложим на большей стороне AB отрезок AK , равный AC . Получится равнобедренный треугольник ACK , в нём углы при основании равны. Далее, аккуратно сравнивая углы (угол ACB содержит угол ACK целиком, а внешний угол AKC больше угла B), приходим к выводу: угол C больше угла B . То есть против большей стороны AB лежит

больший угол C . Подробное доказательство есть в учебнике — здесь важно понять саму идею: большую сторону «подпирает» большой угол.

Главное следствие — про прямоугольный треугольник

 **Следствие:** В прямоугольном треугольнике **гипотенуза** (сторона, лежащая против прямого угла) — самая длинная сторона.

Почему? Прямой угол равен 90° — это самый большой угол в прямоугольном треугольнике (два других острые, меньше 90°). А против самого большого угла лежит самая большая сторона. Эта сторона и есть гипотенуза. Катеты (две стороны, образующие прямой угол) всегда короче гипотенузы.

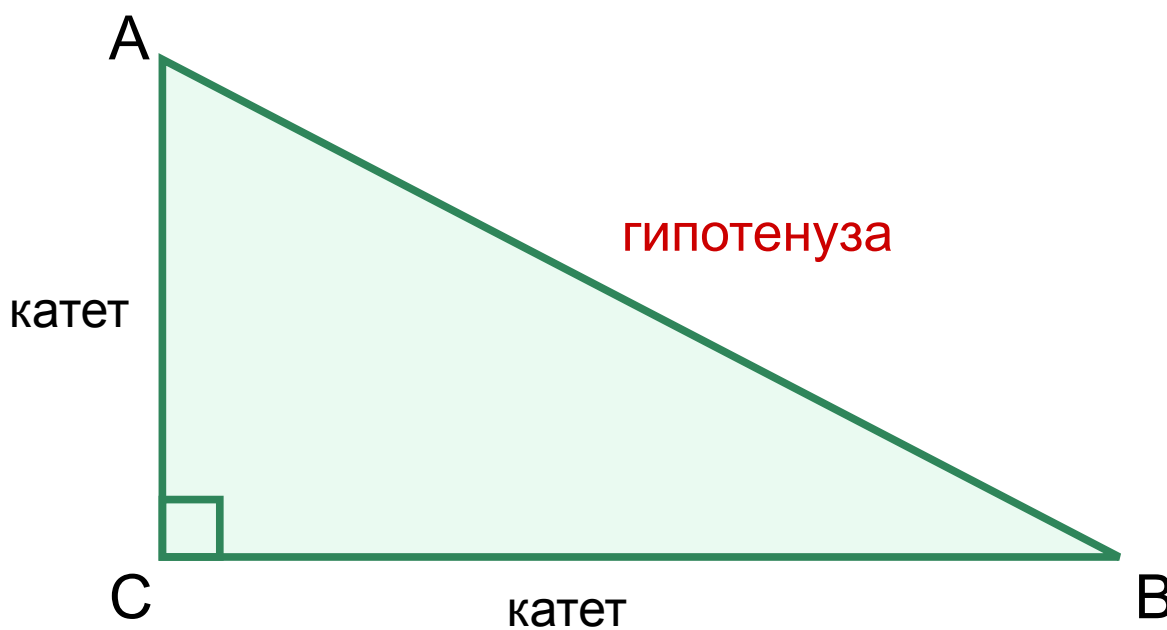




Рис. 2. Гипотенуза AB лежит против прямого угла C и длиннее любого катета

 **Частая ошибка:** Решить, что катет может оказаться длиннее гипотенузы. Никогда! Гипотенуза — всегда самая длинная сторона прямоугольного

треугольника.

Признак равнобедренного треугольника

Раньше мы знали: *если* треугольник равнобедренный (две стороны равны), *то* углы при основании равны. А что, если наоборот — мы видим два равных угла?

 **Теорема (признак равнобедренного треугольника):** Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный (стороны, лежащие против равных углов, равны).

Это прямо вытекает из теоремы 2: равным углам соответствуют равные стороны (если бы одна сторона была больше, то и угол против неё был бы больше — но углы равны, значит и стороны равны).

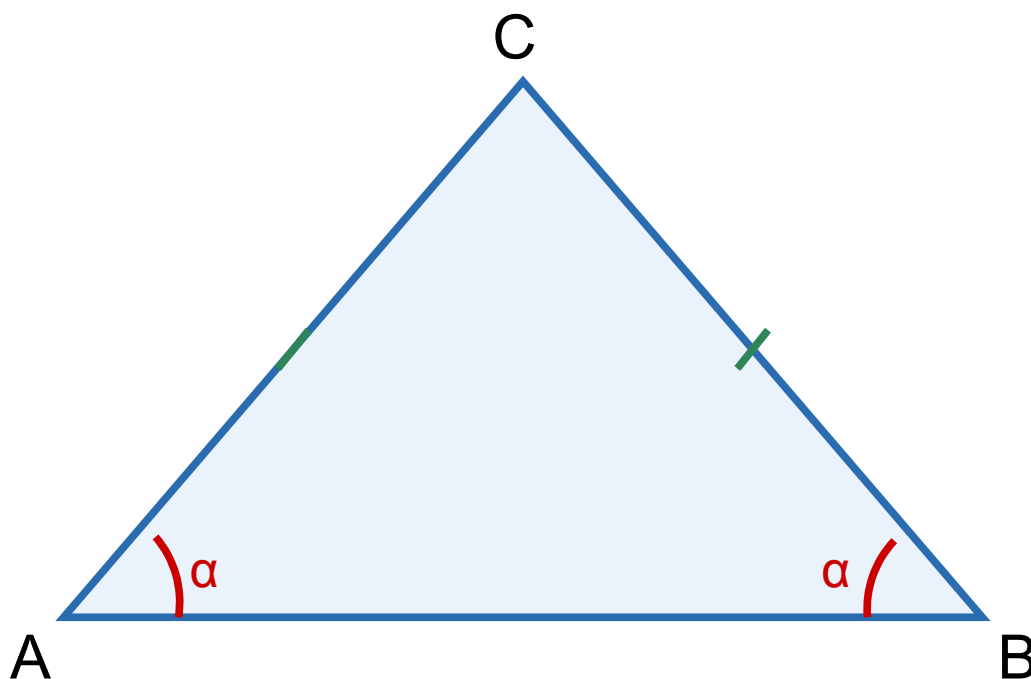


Рис. 3. Равные углы при A и B \Rightarrow равные стороны CA и CB

🤔 **А знаешь ли ты?** Эту связь сторон и углов используют моряки и геодезисты. Измерив углы, под которыми виден далёкий объект, они вычисляют расстояния, не подходя к нему вплотную. Целая наука — триангуляция — стоит на том, что углы и стороны треугольника жёстко связаны.

🕒 Начерти сам: нарисуй треугольник с явно разными сторонами. Не измеряя транспортиром, предскажи, какой угол самый большой, а какой самый маленький. Потом проверь транспортиром.



Разбор задач

Задача 1. В треугольнике ABC стороны равны: $AB = 7$ см, $BC = 5$ см, $AC = 9$ см. Расставь углы A, B, C по возрастанию.

Дано: $AB = 7$, $BC = 5$, $AC = 9$. **Найти:** порядок углов.

Решение. Против каждой стороны лежит угол: против $AB (=7)$ — угол C; против $BC (=5)$ — угол A; против $AC (=9)$ — угол B. Стороны по возрастанию: $BC (5) < AB (7) < AC (9)$. Значит и углы: $\angle A < \angle C < \angle B$.

Ответ: $\angle A < \angle C < \angle B$.

Задача 2. В треугольнике $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Какая сторона самая длинная, какая самая короткая?

Дано: $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. **Найти:** самую длинную и короткую стороны.

Решение. Против большего угла — большая сторона. Самый большой угол B (70°) — против него лежит сторона AC, она самая длинная. Самый маленький угол A (50°) — против него сторона BC, она самая короткая.

Ответ: самая длинная — AC, самая короткая — BC.

Задача 3. В прямоугольном треугольнике катеты равны 6 см и 8 см, а гипотенуза 10 см. Подтверди, что гипотенуза — наибольшая сторона, и объясни почему.

Дано: катеты 6 и 8, гипотенуза 10, угол между катетами 90° . **Доказать:** гипотенуза наибольшая.

Решение. Гипотенуза лежит против прямого угла (90°). Прямой угол — наибольший в треугольнике, так как два других острые (меньше 90°). Против наибольшего угла лежит наибольшая сторона. Числа подтверждают: $10 > 8 > 6$.

Ответ: гипотенуза (10 см) — наибольшая, потому что лежит против наибольшего, прямого, угла.

Задача 4. В треугольнике ABC угол A равен углу B. Что можно сказать о сторонах? Дано: $\angle A = \angle B = 55^\circ$.

Дано: $\angle A = \angle B = 55^\circ$. **Найти:** соотношение сторон.

Решение. Если два угла равны, то стороны против них равны (признак равнобедренного треугольника). Против $\angle A$ лежит BC, против $\angle B$ лежит AC. Значит $BC = AC$ — треугольник равнобедренный с основанием AB. Третий угол $C = 180^\circ - 55^\circ - 55^\circ = 70^\circ$.

Ответ: $BC = AC$, треугольник равнобедренный; $\angle C = 70^\circ$.

Задача 5. В треугольнике MNK $\angle M = 40^\circ$, $\angle N = 40^\circ$, $MK = 6$ см. Найди сторону NK.

Дано: $\angle M = \angle N = 40^\circ$, $MK = 6$ см. **Найти:** NK.

Решение. Углы M и N равны, значит стороны против них равны. Против $\angle M$ лежит NK, против $\angle N$ лежит MK. Поэтому $NK = MK = 6$ см.

Ответ: $NK = 6$ см.

Задача 6. Может ли в треугольнике быть так: сторона a больше стороны b, но угол, лежащий против a, меньше угла, лежащего против b?

Дано: $a > b$. **Найти:** возможно ли, чтобы угол против a был меньше.

Решение. Нет. По теореме против большей стороны лежит больший угол. Раз $a > b$, то угол против a больше угла против b. Обратного быть не может.

Ответ: нет, невозможно.



Запомни главное

- Против большей стороны лежит больший угол (и наоборот: против большего угла — большая сторона).
- Стороны и углы идут «парами по росту»: упорядочил стороны — углы выстроились так же.

- В прямоугольном треугольнике **гипотенуза — наибольшая сторона** (против прямого угла).
- **Признак равнобедренного:** равны два угла \Rightarrow равны стороны против них.



Домашнее задание

1. В треугольнике стороны равны 4 см, 6 см, 5 см. Расставь углы против них по возрастанию.
2. В треугольнике $\angle A = 80^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Назови наибольшую и наименьшую стороны.
3. В прямоугольном треугольнике один острый угол 30° , другой 60° . Какая сторона самая длинная? Объясни.
4. В треугольнике $\angle P = \angle Q$. Что можно сказать о сторонах PR и QR?
5. В треугольнике DEF $\angle D = \angle F = 65^\circ$, DE = 8 см. Найди EF.
6. В треугольнике $\angle A = 90^\circ$. Сравни сторону BC со сторонами AB и AC.
7. Стороны треугольника 10 см, 10 см, 12 см. Какие углы равны и почему?
8. В треугольнике ABC $\angle A = 100^\circ$. Может ли сторона AB быть самой длинной? Объясни.
9. ★ В треугольнике ABC $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. На стороне AC отметили точку M. Сравни отрезки и определи, какая из сторон AB, BC, AC наибольшая. (Подсказка: найди $\angle C$, затем сравни углы.)