

# Урок 22. Прямоугольные треугольники и их свойства


Геометрия, 7 класс · Гл. IV, §3 · ~45 минут

## Что ты узнаешь


- Как устроен **прямоугольный треугольник**: где у него катеты, а где гипотенуза.
- Почему **сумма двух острых углов** в нём всегда ровно  $90^\circ$ .
- Крутое свойство: **катет, лежащий против угла  $30^\circ$ , равен половине гипотенузы** — и обратное к нему.
- Как этими свойствами щёлкать задачи как орешки.

## Разбираемся в теме

Посмотри на угол комнаты, на лист тетради, на экран телефона. Всюду прячутся прямые углы. А если разрезать прямоугольник по диагонали — получится самая знаменитая фигура всей геометрии: **прямоугольный треугольник**. На нём держится половина математики (а ещё строительство, навигация и компьютерная графика). Давай познакомимся поближе.

 **Определение:** Треугольник называется **прямоугольным**, если один из его углов прямой (равен  $90^\circ$ ).

У такого треугольника стороны получают специальные имена.

 **Определение:** Сторона, лежащая **против прямого угла**, называется **гипотенузой**. Две стороны, образующие прямой угол, называются **катетами**.

Гипотенуза — всегда самая длинная сторона треугольника (запомни это, проверять себя удобно). Катеты — это те две «стенки», между которыми и зажат прямой угол.

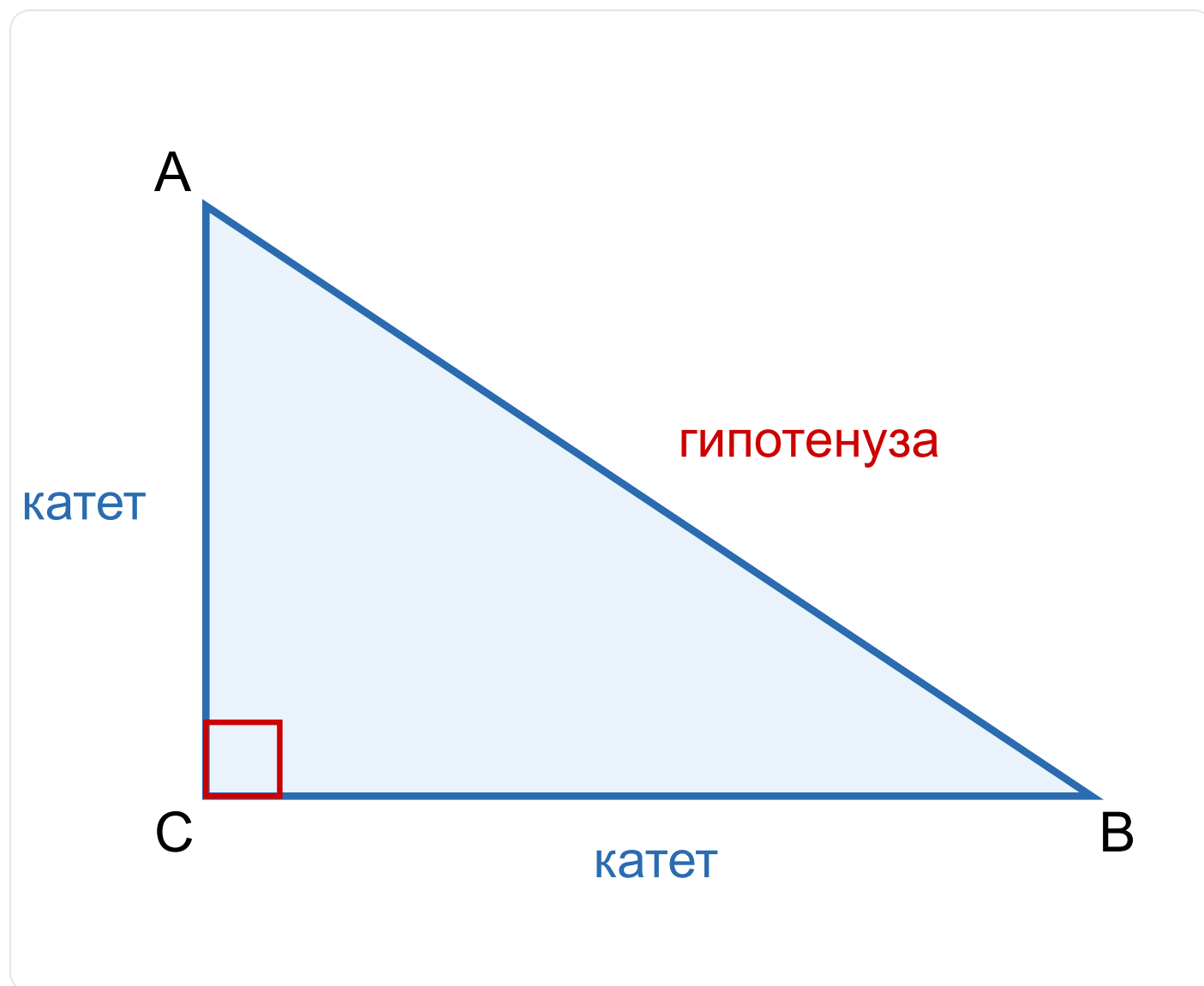



Рис. 1. Прямоугольный треугольник ABC ( $\sphericalangle C = 90^\circ$ ): AC и CB — катеты, AB — гипотенуза

💡 **Лайфхак:** Как не запутаться? Гипотенуза «прячется» от прямого угла — она всегда напротив него. Катеты же «держат» прямой угол с двух сторон, как руки.


## Свойство 1. Сумма острых углов равна $90^\circ$

Вспомни главную теорему про треугольники: сумма всех трёх углов равна  $180^\circ$ . А у прямоугольного один угол уже занят — он  $90^\circ$ . Что остаётся двум другим?

 **Теорема:** Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна  $90^\circ$ .


*Доказательство.* Сумма углов любого треугольника равна  $180^\circ$ . Один угол прямоугольного треугольника равен  $90^\circ$ . Значит, на два оставшихся угла приходится  $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ . Что и требовалось. ■

То есть острые углы прямоугольного треугольника **дополняют друг друга до  $90^\circ$** . Знаешь один — мгновенно находишь второй: если один  $35^\circ$ , то другой  $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ .

 **Посчитай сам:** в прямоугольном треугольнике один острый угол равен  $62^\circ$ . Чему равен второй? (Ответ в конце урока — но ты ведь и сам справишься.)

## Свойство 2. Катет против угла $30^\circ$

А вот теперь — настоящая жемчужина. Запомни её на всю жизнь, она выручает постоянно.

 **Теорема:** Катет, лежащий против угла в  $30^\circ$ , равен половине гипотенузы.

Давай разберём, почему так. Возьмём прямоугольный треугольник ABC, где  $\angle C = 90^\circ$ , а  $\angle A = 30^\circ$ . Тогда против угла A лежит катет CB — вот про него и теорема:  $CB = \frac{1}{2} \cdot AB$ .

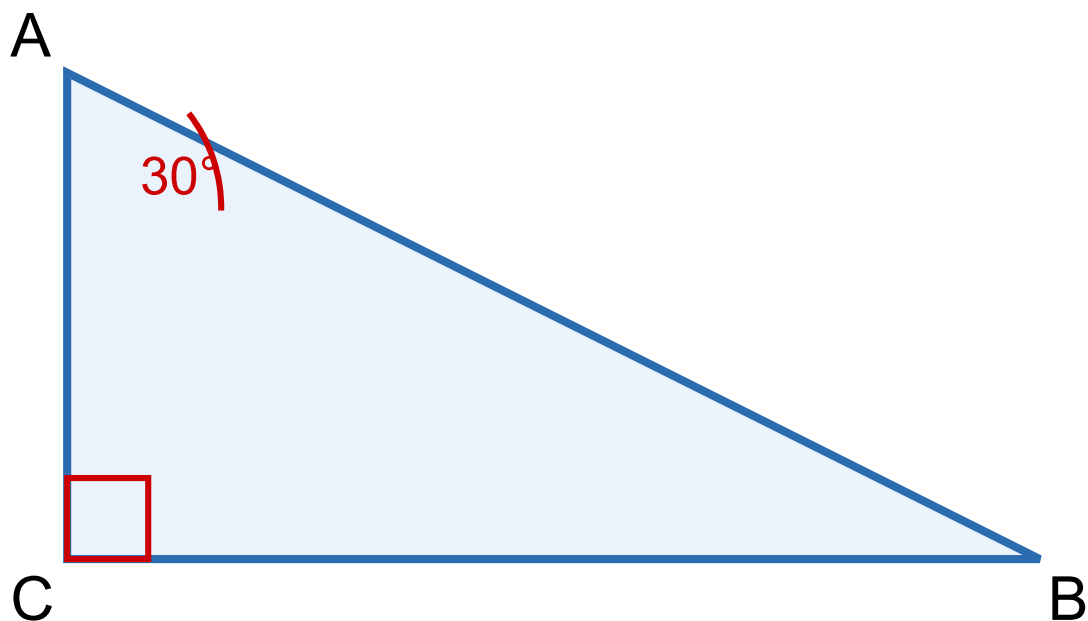



Рис. 2.  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ . Тогда катет  $CB = \frac{1}{2} AB$

*Доказательство (идея «достроим до зеркала»).* Приложим к нашему треугольнику его точную копию, отразив через катет AC. Получится новый, большой треугольник ABD (точка D — отражённая B).

В нём угол при A теперь  $30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ . А угол при вершине B и угол при D — каждый по  $60^\circ$  (ведь  $\angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ). Значит, все три угла большого треугольника равны  $60^\circ$  — он **равносторонний!** Поэтому  $BD = AB$ . Но BD — это две наши маленькие CB, сложенные вместе:  $BD = 2 \cdot CB$ . Отсюда  $2 \cdot CB = AB$ , то есть  $CB = \frac{1}{2} \cdot AB$ . ■

 **Обратное свойство:** Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен  $30^\circ$ .

Это работает в обе стороны: увидел «катет = пол-гипотенузы» — смело пиши  $30^\circ$ .  
Увидел угол  $30^\circ$  — противолежащий катет вдвое короче гипотенузы.

**⚠ Частая ошибка:** Половине гипотенузы равен катет против угла  $30^\circ$ , а не против угла  $60^\circ$ ! Против  $60^\circ$  лежит другой, более длинный катет. Всегда смотри: «маленький угол — маленький (противолежащий) катет».

**😊 А знаешь ли ты?** Треугольник с углами  $30^\circ$ - $60^\circ$ - $90^\circ$  — любимец строителей и художников. Его стороны относятся как  $1 : \sqrt{3} : 2$ , и эта пропорция встречается даже в кристаллах и пчелиных сотах.

### Разбор задач

**Задача 1. Дано:** прямоугольный треугольник,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 28^\circ$ . **Найти:**  $\angle B$ .

*Решение.* Острые углы прямоугольного треугольника в сумме дают  $90^\circ$ .  $\angle B = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$ . **Ответ:**  $62^\circ$ .

**Задача 2. Дано:** прямоугольный треугольник ABC,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ , гипотенуза  $AB = 16$  см. **Найти:** катет CB. *Решение.* Катет CB лежит против угла  $A = 30^\circ$ . По теореме он равен половине гипотенузы.  $CB = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$  см. **Ответ:** 8 см.

**Задача 3. Дано:** прямоугольный треугольник,  $\angle C = 90^\circ$ , катет, лежащий против угла A, равен 7 см, гипотенуза равна 14 см. **Найти:**  $\angle A$ . *Решение.* Катет равен 7 см, гипотенуза 14 см, значит катет =  $\frac{1}{2}$  гипотенузы ( $7 = \frac{1}{2} \cdot 14$ ). По обратному свойству угол против этого катета равен  $30^\circ$ .  $\angle A = 30^\circ$ . **Ответ:**  $30^\circ$ .

**Задача 4. Дано:** прямоугольный треугольник, один острый угол втрое больше другого. **Найти:** оба острых угла. *Решение.* Пусть меньший угол равен  $x$ , тогда больший —  $3x$ . Их сумма равна  $90^\circ$ .  $x + 3x = 90^\circ$ , то есть  $4x = 90^\circ$ ,  $x = 22,5^\circ$ . Тогда  $3x = 67,5^\circ$ . **Ответ:**  $22,5^\circ$  и  $67,5^\circ$ .

**Задача 5. Дано:** прямоугольный треугольник ABC,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ , катет CB = 5 см. **Найти:** гипотенузу AB. *Решение.* Найдём  $\angle A$ :  $\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ . Катет CB

лежит против угла  $A = 30^\circ$ , значит  $CB = \frac{1}{2} \cdot AB$ . Тогда  $AB = 2 \cdot CB = 2 \cdot 5 = 10$  см.

**Ответ:** 10 см.

**Задача 6. Дано:** в прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла  $C$  проведена высота, а  $\angle A = 50^\circ$ . **Найти:** угол между высотой  $CH$  и катетом  $CB$  (то есть  $\angle BCH$ ). *Решение.* В треугольнике  $ABC$ :  $\angle B = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ . Высота  $CH$  перпендикулярна  $AB$ , значит треугольник  $BCH$  прямоугольный ( $\angle CHB = 90^\circ$ ). В нём  $\angle B = 40^\circ$ , поэтому  $\angle BCH = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ . **Ответ:**  $50^\circ$ .



### Запомни главное

- **Гипотенуза** — против прямого угла, самая длинная сторона. **Катеты** — две стороны при прямом угле.
- **Сумма острых углов** прямоугольного треугольника =  $90^\circ$ .
- **Катет против угла  $30^\circ$  = половине гипотенузы.** И наоборот: катет =  $\frac{1}{2}$  гипотенузы  $\Rightarrow$  угол против него  $30^\circ$ .
- Самая длинная сторона лежит против самого большого угла — а самый большой в прямоугольном треугольнике это прямой угол.



### Домашнее задание

1. В прямоугольном треугольнике один острый угол равен  $41^\circ$ . Найди второй острый угол.
2. Назови, какая сторона будет гипотенузой в прямоугольном треугольнике  $MNK$ , если  $\angle N = 90^\circ$ .
3. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 24 см, один из острых углов  $30^\circ$ . Найди катет, лежащий против этого угла.
4. В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против острого угла, равен 9 см, а гипотенуза 18 см. Найди этот острый угол.
5. Острые углы прямоугольного треугольника относятся как 2 : 3. Найди их.

6. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ )  $\angle A = 60^\circ$ , катет  $CB = 12$  см. Найди гипотенузу  $AB$ .
7. Один острый угол прямоугольного треугольника на  $16^\circ$  больше другого. Найди оба угла.
8. В прямоугольном треугольнике  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ , гипотенуза  $AB = 7$  см. Найди катет  $AC$ .
9. ★ В прямоугольном треугольнике  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) проведена биссектриса острого угла  $A$ , причём  $\angle A = 40^\circ$ . Найди угол между этой биссектрисой и катетом  $AC$ .