# Урок 23. Признаки равенства прямоугольных треугольников

**Геометрия, 7 класс · Гл. IV, §3 · ~45 минут**

## 🎯 Что ты узнаешь

- Почему у прямоугольных треугольников есть **свои, особые признаки равенства** — короче и проще обычных.
- Четыре признака: **по двум катетам**, **по катету и острому углу**, **по гипотенузе и острому углу**, **по гипотенузе и катету**.
- Как доказывать равенство треугольников быстро, не перебирая всё подряд.

## 📖 Разбираемся в теме

Помнишь обычные признаки равенства треугольников? По двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум углам, по трём сторонам. Они работают всегда. Но у прямоугольных треугольников есть приятный бонус: один угол у них **уже известен** — он прямой, 90°. А значит, чтобы доказать равенство, нужно меньше данных. Это как пароль, в котором первая цифра всем известна — остаётся подобрать поменьше остального.

Разберём все четыре признака. Везде считаем, что прямые углы у треугольников отмечены.

### Признак 1. По двум катетам

> 📌 **Признак:** Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.

А это, по сути, старый добрый признак «по двум сторонам и углу между ними»! Ведь катеты — это две стороны, а угол между ними — прямой, и он одинаков

(90°) у обоих. Поэтому ничего нового доказывать не надо.

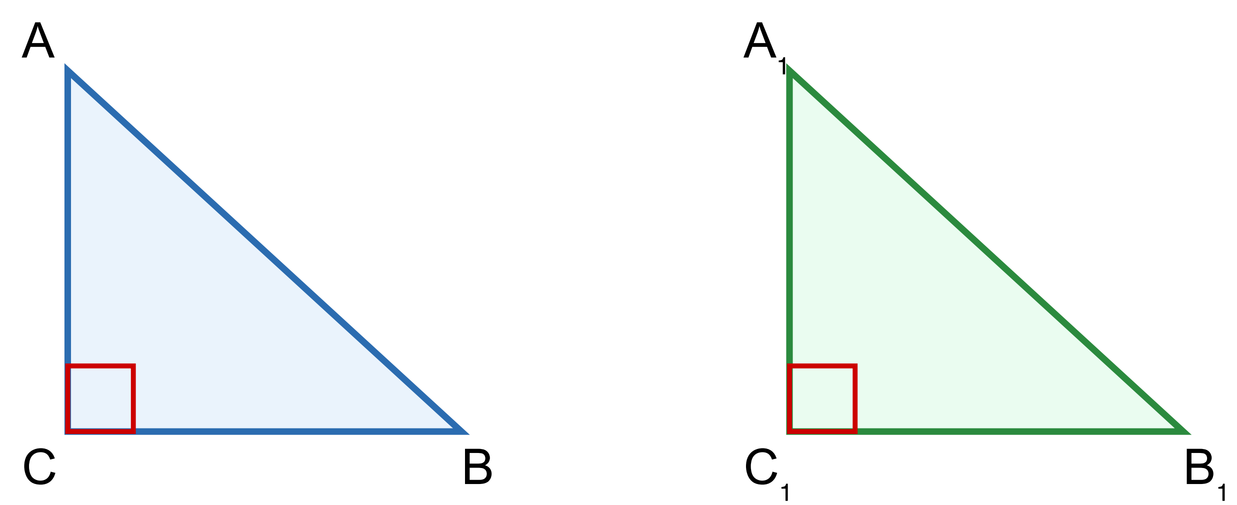


*Рис. 1. Равны по двум катетам: $AC = A_1C_1$, $CB = C_1B_1$*

### Признак 2. По катету и острому углу

> 📌 **Признак:** Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему острому углу другого, то такие треугольники равны.

Почему работает? У нас есть сторона (катет) и два прилежащих к ней угла: один острый (по условию равен) и один прямой (всегда 90°). А это уже знакомый признак «по стороне и двум прилежащим углам». Снова прямой угол делает за нас половину работы.

> 💡 **Лайфхак:** Острый угол может быть и не прилежащим, а противолежащим катету — всё равно треугольники окажутся равны. Ведь, зная один острый угол, второй мы находим как 90° минус первый. Так что «острый угол» в этом признаке можно понимать широко.

### Признак 3. По гипотенузе и острому углу

> 📌 **Признак:** Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

Тут хитрость такая. Знаем острый угол — значит знаем и второй (90° минус он). Получается, у двух треугольников совпадают сторона (гипотенуза) и оба прилежащих к ней угла. И снова — признак «по стороне и двум прилежащим углам».

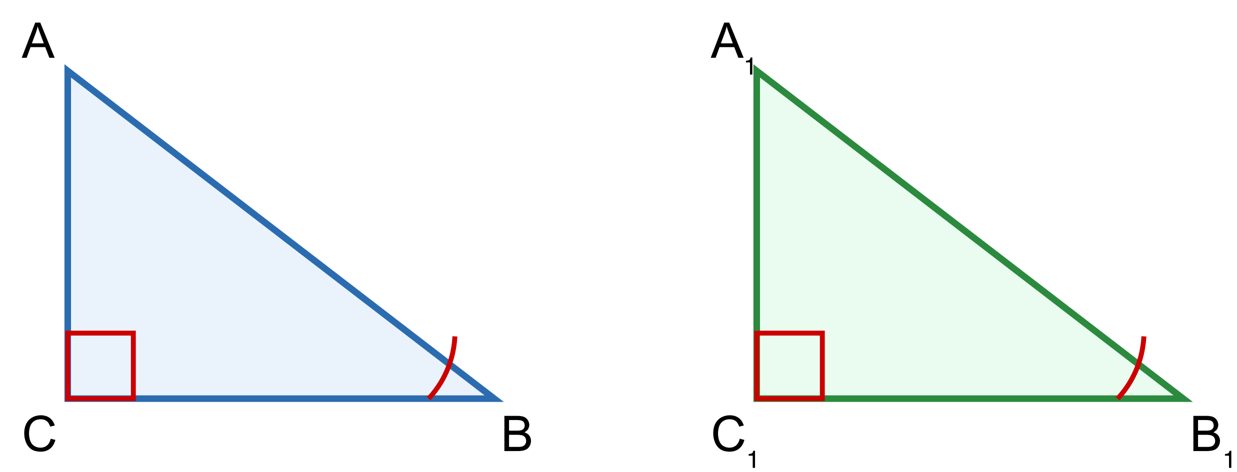


*Рис. 2. Равны по гипотенузе и острому углу: $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$*

### Признак 4. По гипотенузе и катету

А вот это — самый интересный признак, его стоит запомнить отдельно, потому что у обычных треугольников такого «по двум сторонам без угла между ними» нет!

> 📏 **Признак (теорема):** Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

*Доказательство.* Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ прямые углы C и $C_1$, гипотенузы $AB = A_1B_1$ и катеты $CB = C_1B_1$. «Приложим» треугольники друг к другу равными катетами так, чтобы они оказались по разные стороны от общего катета — точки A и $A_1$ легли по разные стороны от прямой CB, а $C_1$ совместился с C. Получится большой треугольник $ABA_1$, в котором CB — высота к стороне $AA_1$ (она перпендикулярна $AA_1$, ведь оба угла прямые). В этом большом треугольнике две стороны равны: $AB = A_1B$ (это бывшие гипотенузы). Значит, он равнобедренный, и высота CB является заодно медианой: $AC = C\,A_1 = A_1C_1$. Итак, у исходных треугольников совпали и вторые катеты $AC = A_1C_1$ — а тогда они равны по двум катетам. ∎

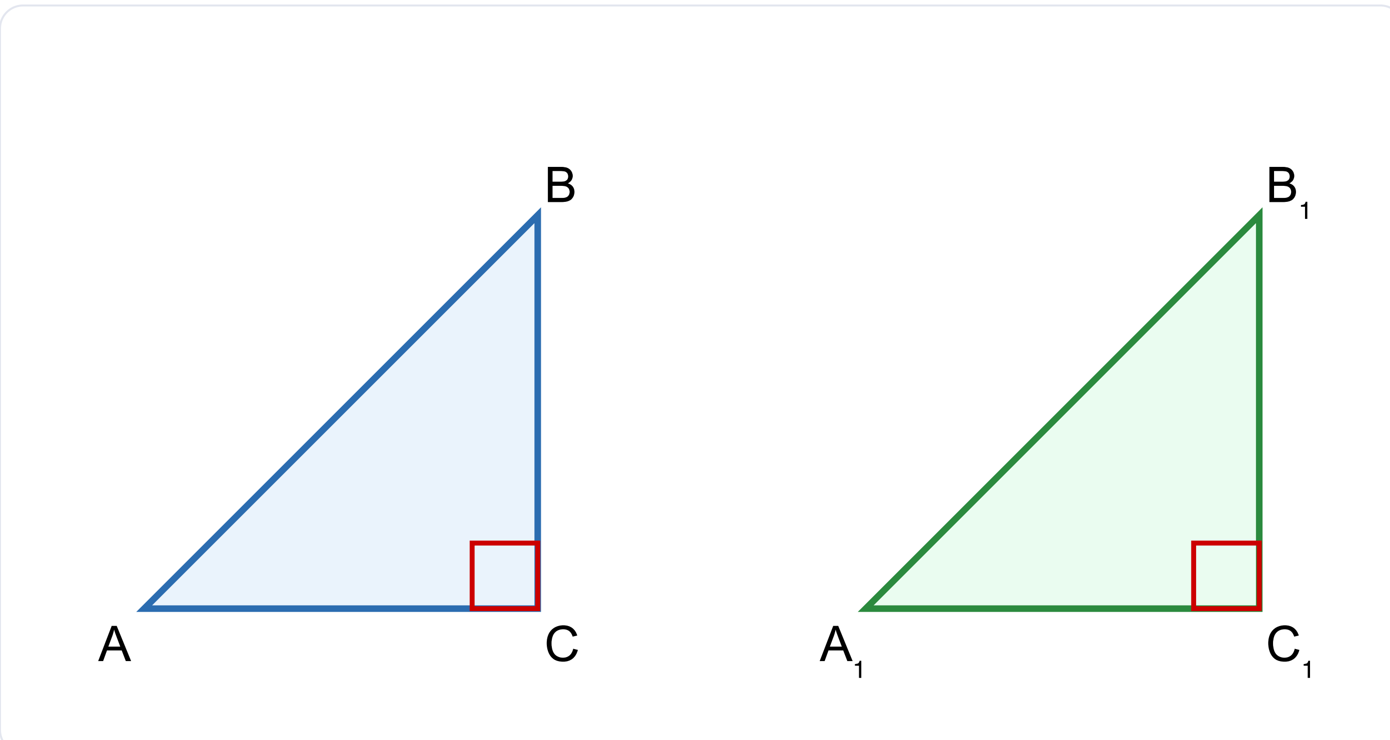


*Рис. 3. Равны по гипотенузе и катету: $AB = A_1B_1$, $CB = C_1B_1$*

⚠️ **Частая ошибка:** Не путай! «По двум сторонам и углу между ними» требует, чтобы угол был **между** этими сторонами. У признака «по гипотенузе и катету» угол (прямой) лежит НЕ между ними — он против гипотенузы. У обычных треугольников такой набор равенство не гарантирует, а у прямоугольных — гарантирует. Это особый бонус.

> 🤔 **А знаешь ли ты?** В англоязычных учебниках эти признаки имеют забавные сокращения: LL (катет-катет), LA (катет-угол), HA (гипотенуза-угол) и HL (гипотенуза-катет). Удобно: четыре буквенные пары — четыре признака.

⏱ **Подумай сам:** даны два прямоугольных треугольника, у которых равны гипотенузы и по одному острому углу (24°). Равны ли треугольники? По какому признаку?

## ✍ Разбор задач

**Задача 1. Дано:** треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AC = A_1C_1$, $CB = C_1B_1$. **Доказать:** $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. *Решение.* У обоих треугольников равны катеты: $AC = A_1C_1$ и $CB = C_1B_1$. Значит, они равны **по двум катетам** (признак 1). **Ответ:** доказано.

**Задача 2. Дано:** $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$ (гипотенузы), $\angle A = \angle A_1$. **Доказать:** $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. *Решение.* Равны гипотенузы $AB = A_1B_1$ и по острому углу $\angle A = \angle A_1$. Значит, треугольники равны **по гипотенузе и острому углу** (признак 3). **Ответ:** доказано.

**Задача 3. Дано:** равнобедренный треугольник $ABC$ с основанием $AC$; $BH$ — высота, проведённая к основанию. **Доказать:** $\triangle ABH = \triangle CBH$. *Решение.* $BH$ — высота, значит $\angle BHA = \angle BHC = 90°$ — треугольники $ABH$ и $CBH$ прямоугольные. Гипотенузы: $AB = CB$ (боковые стороны равнобедренного треугольника). Катет $BH$ — общий. Значит, $\triangle ABH = \triangle CBH$ **по гипотенузе и катету** (признак 4). **Ответ:** доказано.

**Задача 4. Дано:** отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $O$, $OA = OB$, из $A$ и $B$ опущены перпендикуляры $AM$ и $BN$ на прямую $CD$. **Доказать:** $AM = BN$. *Решение.* Рассмотрим прямоугольные треугольники $AMO$ и $BNO$ ($\angle M = \angle N = 90°$). Гипотенузы: $OA = OB$ (по условию). Острые углы $\angle AOM = \angle BON$ (вертикальные). Значит, $\triangle AMO = \triangle BNO$ **по гипотенузе и острому углу**. Из равенства треугольников $AM = BN$. **Ответ:** доказано.

**Задача 5. Дано:** в прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ ($\angle C = \angle C_1 = 90°$) катеты $CB = C_1B_1$ и острые углы $\angle B = \angle B_1$. **Доказать:** $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. *Решение.* Катет CB прилежит к углу B. Дано: $CB = C_1B_1$ и $\angle B = \angle B_1$. Значит, треугольники равны **по катету и прилежащему острому углу** (признак 2). **Ответ:** доказано.

**Задача 6. Дано:** биссектриса BD угла B треугольника ABC, из точки D опущены перпендикуляры DM на сторону AB и DN на сторону BC. **Доказать:** DM = DN. *Решение.* Треугольники BMD и BND прямоугольные ($\angle M = \angle N = 90°$). Гипотенуза BD — общая. Острые углы $\angle MBD = \angle NBD$ (BD — биссектриса). Значит, $\triangle BMD = \triangle BND$ **по гипотенузе и острому углу**. Отсюда DM = DN. **Ответ:** доказано. (Это, кстати, важное свойство: точки биссектрисы одинаково удалены от сторон угла!)

## 💡 Запомни главное

Четыре признака равенства прямоугольных треугольников:

1. **По двум катетам.**
2. **По катету и острому углу.**
3. **По гипотенузе и острому углу.**
4. **По гипотенузе и катету.**

Главная идея: прямой угол (90°) уже «дан бесплатно», поэтому данных нужно меньше. А признак «по гипотенузе и катету» — особенный, у обычных треугольников аналога нет.

## 📝 Домашнее задание

1. По какому признаку равны два прямоугольных треугольника, у которых равны оба катета?
2. По какому признаку равны прямоугольные треугольники с равными гипотенузами и равными острыми углами?
3. У двух прямоугольных треугольников равны гипотенуза и один из катетов. Равны ли треугольники? Назови признак.

4. В равнобедренном треугольнике из вершины угла при основании проведена высота. На какие два треугольника она делит исходный и почему они… (определи, прямоугольные ли они).
5. Точка биссектрисы угла удалена от одной стороны угла на 4 см. На сколько она удалена от другой стороны? Почему?
6. Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O. Из A и B опущены перпендикуляры на прямую CD. Докажи, что эти перпендикуляры равны.
7. Можно ли утверждать, что два прямоугольных треугольника равны, если у них равны по два острых угла? Объясни.
8. ⭐ В треугольнике ABC высоты AH и CK равны. Докажи, что треугольник ABC равнобедренный (AB = CB). Подсказка: рассмотри прямоугольные треугольники AHC и CKA или AHB и CKB.