

Урок 24. Расстояние от точки до прямой

Геометрия, 7 класс · Гл. IV, §3 · ~45 минут

Что ты узнаешь


- Что такое **наклонная** и чем она отличается от **перпендикуляра**.
- Почему **перпендикуляр короче любой наклонной** — и поэтому именно его длина называется расстоянием.
- Что такое **расстояние от точки до прямой** и **расстояние между параллельными прямыми**.
- Главное свойство: **параллельные прямые везде на одинаковом расстоянии друг от друга**.

Разбираемся в теме

Представь: ты стоишь на берегу прямой реки и хочешь как можно быстрее добежать до воды. По какой дорожке бежать? Очевидно — по самой короткой, по прямой «напрямик», под прямым углом к берегу. Любой другой путь, наискосок, будет длиннее. Вот эта интуиция и есть вся суть сегодняшнего урока, только строго.

Перпендикуляр и наклонная

Возьмём прямую a и точку A , которая на ней не лежит. Опустим из A на прямую разные отрезки.

 **Определение: Перпендикуляр**, опущенный из точки на прямую, — это отрезок от точки до прямой, перпендикулярный этой прямой. Конец отрезка на прямой называется **основанием перпендикуляра**.

▢ **Определение:** Наклонная, проведённая из точки к прямой, — это любой отрезок, соединяющий точку с точкой прямой и не перпендикулярный ей. Конец на прямой — **основание наклонной**.

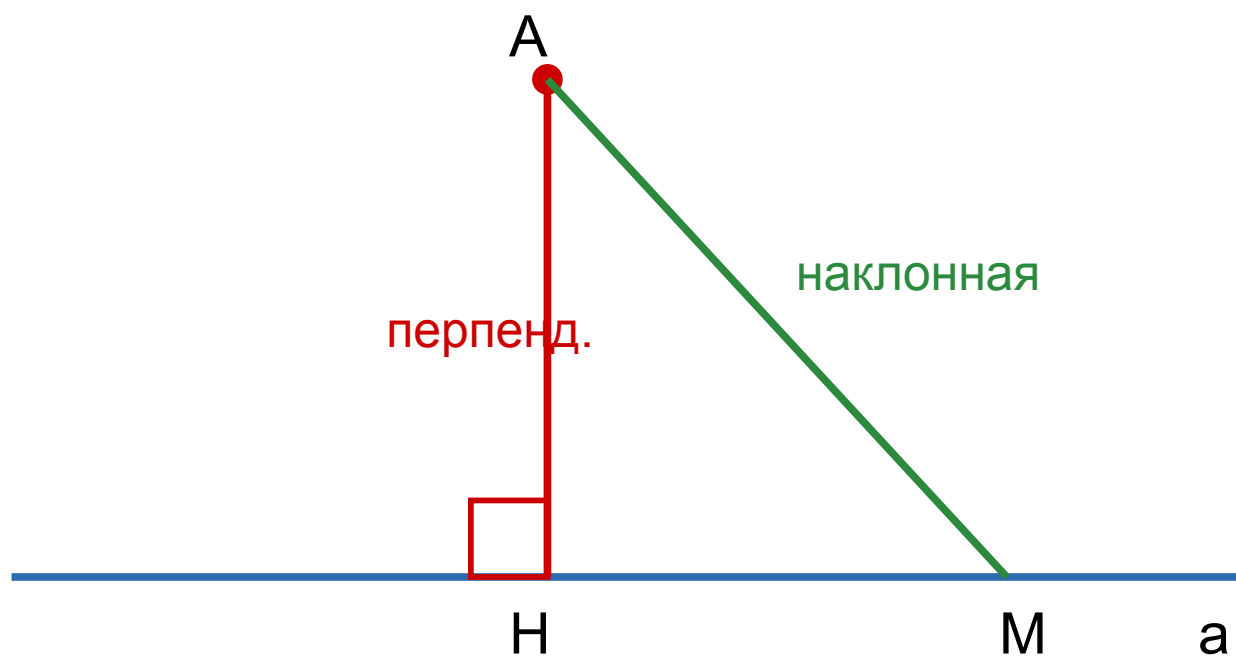



Рис. 1. AN — перпендикуляр (N — его основание), AM — наклонная (M — её основание)


▢ **Теорема:** Длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, **меньше** длины любой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой.


Доказательство. Рассмотрим треугольник $АНМ$, где $АН$ — перпендикуляр, $АМ$ — наклонная. В нём угол $Н$ прямой (90°), значит он и есть наибольший угол треугольника. Против большего угла лежит большая сторона. Против прямого угла $Н$ лежит сторона $АМ$ (это гипотенуза!), а против острого угла лежит катет $АН$. Значит, $АМ > АН$. Перпендикуляр короче. ■

 **Лайфхак:** Перпендикуляр — это гипотенуза или катет? Катет! Наклонная всегда гипотенуза в треугольнике «перпендикуляр–наклонная–кусок прямой». А гипотенуза длиннее катета. Вот и весь секрет, почему «напрямик» короче.

Расстояние от точки до прямой


Раз перпендикуляр — самый короткий путь от точки до прямой, именно его и берут как «расстояние».

 **Определение:** Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

 **Начерти сам:** проведи прямую, поставь над ней точку и опусти перпендикуляр с помощью угольника. Его длина и есть расстояние. Проведи рядом пару наклонных — убедись, что они длиннее.

Расстояние между параллельными прямыми

А теперь — красивое свойство параллельных прямых.

 **Теорема:** Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

Иначе говоря: какую точку на прямой a ни возьми, расстояние от неё до параллельной прямой b будет одним и тем же.

Доказательство (идея). Возьмём на прямой a две точки A и B и опустим из них перпендикуляры $АН_1$ и $ВН_2$ на прямую b . Оба перпендикуляра перпендикулярны b , значит они параллельны друг другу. А раз $AB \parallel b$ и $АН_1 \parallel ВН_2$, то $АН_1ВН_2$ — параллелограмм-«прямоугольник», и его противоположные стороны равны: $АН_1 = ВН_2$. Получается, расстояние одинаково в любой точке. ■

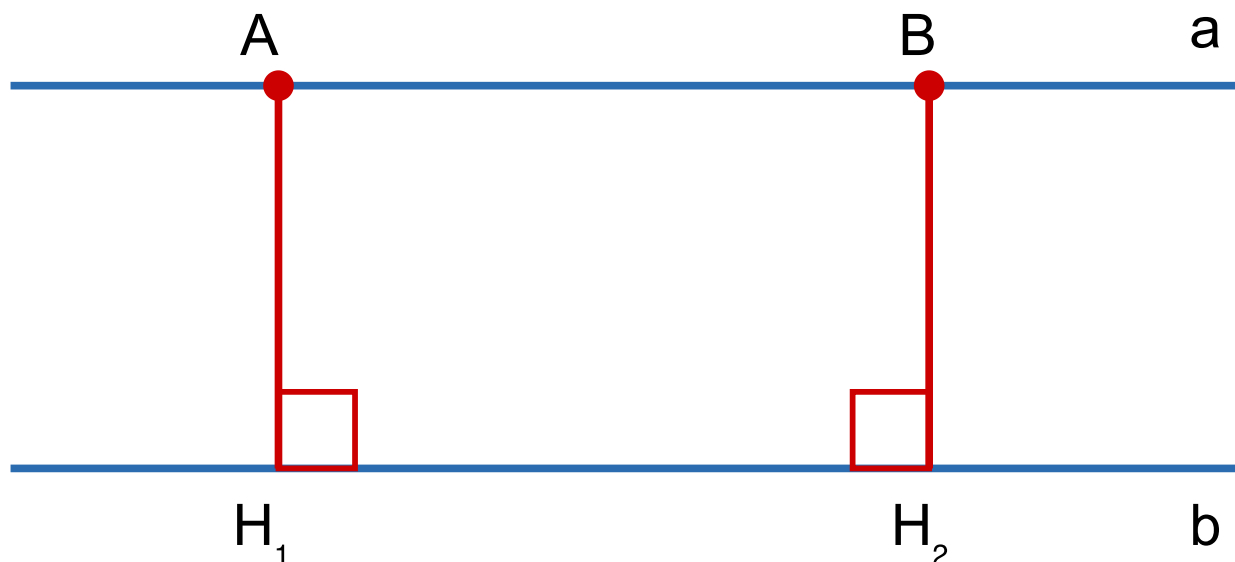


Рис. 2. $AH_1 = BH_2$ — расстояние между a и b одинаково в любой точке

🔺 **Определение:** Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется расстояние от любой точки одной из них до другой прямой.

⚠️ **Частая ошибка:** Расстояние — это длина именно **перпендикуляра**, а не любого отрезка между прямыми! Если измеришь «наискосок», получишь больше, чем нужно. И ещё: между **пересекающимися** прямыми понятия «расстояние» нет (оно постоянно меняется и в точке пересечения равно нулю).

🤔 **А знаешь ли ты?** Именно из-за свойства «параллельные везде на одинаковом расстоянии» рельсы железной дороги не сходятся и не расходятся — поезд едет безопасно. А кажущееся «схождение» рельсов вдали — это всего лишь обман зрения, перспектива.



Разбор задач

Задача 1. Дано: из точки A к прямой проведены перпендикуляр длиной 6 см и наклонная длиной 10 см. **Найти:** что больше и на сколько; что из этого — расстояние от A до прямой. *Решение.* Перпендикуляр всегда короче наклонной: $6 \text{ см} < 10 \text{ см}$, разница 4 см. Расстоянием от точки до прямой служит длина перпендикуляра. **Ответ:** наклонная больше на 4 см; расстояние = 6 см.

Задача 2. Дано: прямые a и b параллельны; из точки M прямой a опущен перпендикуляр на b , равный 5 см. **Найти:** расстояние от любой другой точки прямой a до прямой b . *Решение.* Все точки прямой a равноудалены от b . Значит, расстояние всюду одинаково. **Ответ:** 5 см.

Задача 3. Дано: из точки A к прямой проведён перпендикуляр $АН$ и наклонная $АМ$, $\angle AMH = 30^\circ$, $АН = 4 \text{ см}$. **Найти:** длину наклонной $АМ$. *Решение.* Треугольник $АНМ$ прямоугольный ($\angle H = 90^\circ$). Катет $АН$ лежит против угла $\angle AMH = 30^\circ$. Катет против угла 30° равен половине гипотенузы: $АН = \frac{1}{2} \cdot АМ$. Значит, $АМ = 2 \cdot АН = 2 \cdot 4 = 8 \text{ см}$. **Ответ:** 8 см.

Задача 4. Дано: точка A удалена от прямой a на 3 см. На прямой a отмечена точка M так, что $АМ = 6 \text{ см}$. **Найти:** угол между наклонной $АМ$ и прямой a . *Решение.* $АН = 3 \text{ см}$ — перпендикуляр (расстояние), $АМ = 6 \text{ см}$ — наклонная (гипотенуза). Замечаем: $АН = \frac{1}{2} \cdot АМ$ ($3 = \frac{1}{2} \cdot 6$). Значит, катет равен половине гипотенузы, и угол против этого катета равен 30° . Против $АН$ лежит угол при вершине M , то есть угол между наклонной $АМ$ и прямой a равен 30° . **Ответ:** 30° .

Задача 5. Дано: параллельные прямые a и b , расстояние между ними 7 см. Точка C лежит на прямой a . **Найти:** длину наклонной из C к прямой b , если эта наклонная образует с перпендикуляром угол 60° . *Решение.* Перпендикуляр $СН = 7 \text{ см}$ (расстояние). Наклонная $СМ$ образует с перпендикуляром угол 60° , значит в прямоугольном треугольнике $СНМ$ ($\angle H = 90^\circ$) угол при C равен 60° , а угол при M равен 30° . Катет $СН$ лежит против угла $M = 30^\circ$, значит $СН = \frac{1}{2} \cdot СМ$, отсюда $СМ = 2 \cdot 7 = 14 \text{ см}$. **Ответ:** 14 см.

Задача 6. Дано: две параллельные прямые. Из точки А одной прямой опущен перпендикуляр АН на вторую прямую и проведена наклонная АВ, причём $АН = 5$ см, $АВ = 13$ см. **Найти:** сравни АВ с расстоянием между прямыми и определи, какой отрезок выражает расстояние. *Решение.* Расстояние между прямыми — это длина перпендикуляра $АН = 5$ см. Наклонная $АВ = 13$ см длиннее. **Ответ:** расстояние между прямыми = 5 см; наклонная (13 см) длиннее перпендикуляра.



Запомни главное

- Из точки к прямой можно провести **один перпендикуляр** и сколько угодно **наклонных**.
- **Перпендикуляр короче любой наклонной** (он катет, наклонная — гипотенуза).
- **Расстояние от точки до прямой** = длина перпендикуляра.
- **Параллельные прямые везде на одинаковом расстоянии.** Это расстояние — перпендикуляр от точки одной прямой до другой.



Домашнее задание

1. Из точки проведены к прямой перпендикуляр 8 см и наклонная 9 см. Какой отрезок выражает расстояние от точки до прямой?
2. Может ли наклонная быть короче перпендикуляра, проведённых из одной точки к одной прямой? Объясни.
3. Расстояние между параллельными прямыми а и b равно 4 см. Чему равно расстояние от произвольной точки прямой b до прямой а?
4. Из точки А к прямой проведены перпендикуляр АН и наклонная АМ, $\angle АМН = 30^\circ$, $АМ = 12$ см. Найди АН.
5. Точка удалена от прямой на 5 см. Найди длину наклонной, проведённой из этой точки под углом 30° к прямой.

6. Прямые a и b параллельны. Из точки прямой a опущен перпендикуляр на b длиной 6 см. Чему равны перпендикуляры, опущенные из всех остальных точек прямой a ?
7. Точка M лежит внутри угла. Что выражает расстояние от M до стороны угла?
8. ★ Точка A удалена от прямой a на 9 см. Из A проведена наклонная AM длиной 18 см. Найди угол между наклонной AM и перпендикуляром AN .