Ответы к заданиям — Математика

Загляни сюда только после того, как сам(а) попробовал(а) решить! Сверь ответы и разбери ошибки.

Урок 1. Логика и рассуждения

1. **Нельзя определить.** И рыцарь скажет «я рыцарь» (правда), и лжец скажет «я рыцарь» (он ведь лжёт, на самом деле он лжец). Фраза подходит обоим.
2. **Первый — рыцарь, второй — лжец.** Если первый лжец, то его фраза «хотя бы один лжец» оказалась бы правдой — но лжец не говорит правду. Значит, первый рыцарь, и его правдивая фраза требует, чтобы лжец был, — это второй.
3. **Один рыцарь и один лжец, но кто именно — определить нельзя.** Оба не могут быть рыцарями (рыцарь не назовёт рыцаря лжецом) и оба не могут быть лжецами (тогда «А — лжец» от лжеца В было бы правдой). Значит, они разные.
4. **Маша — рисование, Даша — танцы, Гриша — робототехника, Лёша — музыка.** Гриша занял робототехнику. Маше остаётся рисование (музыку и танцы ей нельзя). Тогда Даше нельзя рисование (занято) и она получает танцы или музыку; Лёше — оставшееся. Даша не на рисовании, рисование у Маши; распределяем музыку и танцы: Лёша — музыка, Даша — танцы (проверь: всё согласуется).
5. **«Конфеты или печенье» → конфеты; «Конфеты» → пустая; «Печенье» → печенье.** Коробка с надписью «Конфеты или печенье» не пустая быть пустой не может только если... разбери перебором: ни одна надпись не верна. В коробке «Печенье» не печенье, значит конфеты или пусто; в «Конфеты» не конфеты; в «Конфеты или печенье» — не конфеты и не печенье, значит пусто... но проверь, что получится единственный вариант — он именно такой, как в ответе. (Совет: выпиши таблицу запретов.)
6. Предположи обратное: оба чётные или оба нечётные. В обоих случаях сумма чётная (чёт+чёт=чёт, нечёт+нечёт=чёт). Это противоречит тому, что сумма

нечётна. Значит, числа разной чётности.

7. **Виноват Антон.** Если соврал только Виктор — тогда Виктор виноват, но и Антон («я не виноват») сказал бы правду, а Борис («виноват Антон») солгал бы — уже двое соврали. Перебери: солгал ровно один даёт согласованную картину, когда виноват Антон (тогда лжёт сам Антон, а Борис и Виктор правдивы).
8. **Либо все пятеро рыцари (0 лжецов), либо все пятеро лжецы (5 лжецов).** Разбери, какие бывают пары соседей. Рыцарь, говорящий «он такой же, как я», говорит правду — значит, его правый сосед тоже рыцарь. Лжец, говорящий «он такой же», лжёт — значит, его правый сосед на самом деле ДРУГОЙ, то есть рыцарь. Получается: после рыцаря всегда стоит рыцарь, а после лжеца — рыцарь. Если хоть один лжец есть, то справа от него рыцарь, а дальше по кругу пойдут одни рыцари... и мы по кругу вернёмся к этому лжецу, у которого слева окажется рыцарь, говорящий «справа от меня такой же» — но справа лжец, и рыцарь солгал бы. Противоречие. Значит, лжецов либо ноль (все рыцари — каждый честно говорит про рыцаря-соседа), либо... проверь отдельно случай «все лжецы»: каждый лжец говорит «сосед такой же», сосед тоже лжец (такой же!) — значит фраза правдива, а лжец сказал правду. Противоречие! Итог: согласован только вариант **все пятеро рыцари (0 лжецов)**.

Урок 2. Чётность

1. Сумма **нечётная** (нечётных слагаемых семь — нечётное количество). Произведение **нечётное** (все множители нечётные, а нечёт·нечёт = нечёт).
2. **Нельзя.** Все монеты (1, 5, 25) нечётные. Девять нечётных слагаемых дают нечётную сумму, а 100 чётно.
3. **Нельзя.** Сумма 1+2+…+9 = 45 — нечётна, а знаки не меняют чётность. 0 чётно — не получится.
4. **Нельзя за 5 прыжков.** Каждый прыжок меняет координату на 2 (чётное) или на 3 (нечётное). Чтобы вернуться в 0, сумма всех сдвигов = 0. Подумай:

чётность координаты меняется только от прыжков «на 3». Чтобы вернуться в чётную точку 0, число прыжков «на 3» должно быть чётным. Переберi: при 5 прыжках вернуться в 0 невозможно (попробуй убедиться, что сумма сдвигов не обнуляется; ключ — чётность). Краткий ответ: нет.

5. **Нельзя.** Каждый ход меняет количество «решек» на 2, на 0 или на –2 (переворачиваем 2 монеты), то есть **чётность** числа решек не меняется. В начале решек 0 (чётно), а нужно 7 (нечётно). Невозможно.
6. **Нельзя.** Конь меняет цвет клетки каждым ходом. За 63 хода (нечётное число) он окажется на клетке цвета, противоположного стартовому. Но чтобы обойти все 64 клетки, нужно... посчитай цвета: на доске 32 белых и 32 чёрных. Маршрут из 64 клеток чередует цвета, начав, скажем, с чёрной a1: чёрная, белая, чёрная, … — 64-я клетка будет белой, и это нормально по цветам. Значит, по чётности запрета НЕТ — такой обход (маршрут коня) на самом деле существует! Правильный ответ: **да, возможно** (это классический «маршрут коня»). Запомни: чётность доказывает запреты, но если запрета нет — это ещё не значит, что задача нерешаема; здесь решение есть.
7. **Нельзя.** В доске 5×5 ровно 25 клеток — нечётное число, а каждая костяшка накрывает 2 клетки. Нечётное число клеток двойками не покроешь.
8. **Чётным — да, нулём — тоже возможно.** Ключ: при замене двух чисел a и b на |a–b| сумма всех чисел уменьшается на 2·(меньшее), то есть **чётность общей суммы не меняется**. Начальная сумма 1+2+…+20 = 210 — чётная. Значит, последнее оставшееся число всегда имеет ту же чётность, что и сумма, то есть оно **чётное**. А раз оно чётное, оно МОЖЕТ оказаться нулём (например, разбей числа на пары с равными разностями и сведи к 0). Итог: последнее число обязательно чётное, и оно может быть равно 0.

Урок 3. Принцип Дирихле (принцип ящиков)

1. **5 карандашей.** Ящики — 4 цвета. Четыре можно вытащить разных, а пятый совпадёт по цвету с одним из них (5 > 4).

2. **Усиленный принцип.** Ящики — 12 месяцев, учеников 30. Так как $30 > 2 \cdot 12 = 24$, найдётся месяц, где не меньше 3 учеников. Доказано.
3. **Пара любого цвета — 4 носка** (3 цвета = 3 ящика, четвёртый совпадёт). **Пара чёрного — 4 носка не хватит:** в худшем случае сначала вытащишь все не-чёрные. Если чёрных 5, а других цветов всего a штук, то надо вытащить $(a + 2)$ носка, чтобы среди них точно были 2 чёрных. (Если «остальных много» — точную гарантию пары именно чёрного цвета дать нельзя, пока не знаешь, сколько не-чёрных; в этом и фокус задачи — пара конкретного цвета гарантируется только с учётом числа «чужих».)
4. **Доказано.** Ящики — остатки при делении на 6 (их ровно 6: 0,1,2,3,4,5). Чисел $7 > 6$, значит два числа дают одинаковый остаток. У них разность делится на 6.
5. **Доказано.** Раздели треугольник со стороной 2 на 4 маленьких равносторонних треугольника со стороной 1 (соединив середины сторон). 5 точек, 4 ящика — две точки в одном маленьком треугольнике, а внутри треугольника со стороной 1 расстояние не больше 1.
6. **Доказано.** Строк (горизонталей) на доске 8. Ладей $9 > 8$ — две попадут в одну строку.
7. **Доказано.** Разбей числа на 50 пар соседей: (1,2),(3,4),…,(99,100). Это 50 ящиков. Выбрали 51 число > 50 — значит, какая-то пара взята целиком, а это два соседних числа.
8. **Доказано.** Каждый из n человек сделал от 0 до $n-1$ рукопожатий — кажется, что это n возможных значений и n человек, ящиков ровно столько же. Но числа 0 и $n-1$ не могут встретиться вместе: если кто-то пожал руки всем $(n-1)$, то ни у кого не может быть 0 рукопожатий, и наоборот. Значит, реально встречающихся значений не больше $n-1$, а людей n. Людей больше ящиков — двое совпадут.

Урок 4. Делимость и остатки

1. **Делится на 2, 3, 4, 5, 9, 10.** Последняя цифра 0 → делится на 2, 5, 10. Две последние «80» делятся на 4 → делится на 4. Сумма цифр $7+3+8+0 = 18$

делится и на 3, и на 9 → делится на 3 и на 9.

2. *** = 2, 5 или 8.** Сумма 4 + * + 6 = 10 + * должна делиться на 3. Подходят *, при которых 10+* кратно 3: 12 (*=2), 15 (*=5), 18 (*=8).
3. **Не делится ни на 3, ни на 9.** Сумма цифр числа из ста единиц равна 100. Число делится на 3 ⟺ сумма цифр делится на 3, но 100 на 3 не делится (100 = 3·33 + 1). Значит, и на 3, и на 9 число НЕ делится. (Оно делилось бы на 3, только если бы количество единиц было кратно 3.)
4. **Цифра 3.** Цикл последних цифр степеней тройки: 3, 9, 7, 1 (длина 4). 2025 при делении на 4 даёт остаток 1 → первая цифра цикла → 3.
5. **Остаток 3.** 5 даёт остаток 1 при делении на 4, значит любая степень 5^k даёт остаток 1. Слагаемых 11 штук (от 5^0 до 5^{10}), сумма остатков 11, а 11 даёт остаток 3 при делении на 4.
6. Три подряд идущих числа дают при делении на 3 остатки в каком-то порядке 0, 1, 2 (остатки идут по кругу). Ровно одно из них имеет остаток 0 — оно и делится на 3.
7. **Доказано.** Сумма цифр 1+2+…+8 = 36, и она одна и та же при любом порядке цифр. 36 делится на 9 (36 = 9·4), значит по признаку делимости на 9 любое такое число делится на 9.
8. **Доказано.** Число из n ≥ 2 единиц оканчивается на «…11». Две последние цифры 11 дают остаток 3 при делении на 4 (11 = 4·2+3). Значит, само число даёт остаток 3 по модулю 4. Но квадраты по модулю 4 дают только 0 или 1 (см. Пример 5). Остаток 3 невозможен — значит, это не квадрат.

Урок 5. Комбинаторика: учимся считать варианты

1. **12 способов.** «Мороженое И сироп» → 3·4 = 12 (правило произведения).
2. **125 чисел.** Каждая из трёх позиций — любая из 5 цифр (повторы разрешены): 5·5·5 = 125.
3. **720 способов.** Это перестановки 6 предметов: 6! = 720.

4. **КНИГА — 120 слов** (все 5 букв разные: 5! = 120). **КОЛОБОК** — 7 букв, но повторы: К — 2 раза, О — 3 раза, остальные (Л, Б) по одному. Разных слов: 7! / (2!·3!) = 5040 / (2·6) = 5040 / 12 = 420.
5. **45 способов.** С учётом порядка 10·9 = 90, делим на 2 (порядок неважен): 90 / 2 = 45.
6. **4536 чисел.** Первая цифра: 9 (без нуля). Вторая: 9 (любая из 10, кроме первой). Третья: 8. Четвёртая: 7. Итого 9·9·8·7 = 4536.
7. **12 способов.** «Первое И второе И десерт» → 2·3·2 = 12.
8. **10 способов.** Перебери число пятёрок. Две пятёрки (10 р.) — 1 способ (остаток 0). Одна пятёрка (5 р., осталось 5 р. набрать 1- и 2-рублёвками): двушек может быть 0, 1 или 2 → 3 способа. Ноль пятёрок (набрать 10 р. рублями и двушками): двушек 0,1,2,3,4,5 → 6 способов. Всего 1 + 3 + 6 = 10.

Урок 6. Инварианты и раскраски

1. Сумма-инвариант: $1+2+\dots+10 = \frac{10\cdot 11}{2} = 55$. **Ответ: 55.**
2. При замене двух чисел их разностью чётность суммы не меняется (мы вычитаем чётное $2b$). Начальная сумма $1+\dots+15 = \frac{15\cdot 16}{2} = 120$ — чётная. Значит и последнее число чётное. **Нечётным быть не может.**
3. $7\times 7 = 49$ клеток — нечётно, а домино покрывает по 2. **Нельзя.**
4. Если вырезали две клетки одного цвета — цветов станет 30 и 32, не поровну, а домино требует поровну → **точно нельзя замостить**. Если разного цвета — станет 31 и 31, поровну; это **не доказывает**, что можно (равенство цветов необходимо, но не всегда достаточно), но и не запрещает; чаще всего такие доски замостить удаётся.
5. Следим за числом орлов. Сначала орлов 7 (нечётно). За ход переворачиваем 3 монеты: число орлов меняется на нечётное число (на –3, –1, +1 или +3 в зависимости от того, сколько из трёх были орлами). Значит чётность числа орлов **меняется** каждый ход. Чтобы получить 0 орлов (чётно) из 7 (нечётно), нужно нечётное число ходов — это как раз возможно! Например, перевернуть

монеты $1,2,3$, потом $1,4,5$, потом $1,6,7$: проверь сам, монета 1 перевернётся 3 раза (станет решкой), остальные по 1 разу. **Да, можно**, за нечётное число ходов. (Вывод: тут чётность не запрещает, в отличие от задачи с переворотом по 2 на нечётном числе стаканов.)

6. $4\times 5 = 20$, делится на 3? Нет, $20 = 3\cdot 6 + 2$. **Нельзя** — число клеток не делится на размер уголка.
7. Шахматная раскраска: путь по соседним клеткам всё время чередует цвета. 64 клетки → путь из 64 клеток чередует цвета и начинается на одном цвете, заканчивается на другом (т.к. 64 чётно → последняя клетка другого цвета, чем первая). Но левый нижний и правый верхний углы — **одного цвета**. Значит закончить в противоположном углу нельзя. **Невозможно.**
8. Раскраска по остатку $(i+j) \bmod 4$. Каждая полоска 1×4 накрывает по одной клетке каждого цвета. Для замощения нужно поровну — по 25 каждого цвета (всего 100 клеток, $100/4 = 25$). Подсчёт даёт цвета $25, 24, 25, 26$ — **не поровну**, значит поровну распределить полоски не выйдет. **Замостить нельзя.** Подсказка для подсчёта: пройди по всем клеткам и сосчитай, сколько раз встречается каждый остаток $(i+j) \bmod 4$.

Урок 7. Игры и выигрышные стратегии

1. Проигрышные позиции кратны 4. $12 = 4\cdot 3$ — это П-позиция, она досталась первому. **Выигрывает второй**, дополняя ходы первого до 4.
2. $21 = 4\cdot 5 + 1$ — не кратно 4, значит В-позиция. **Выигрывает первый.** Первый ход: взять 1 камень (оставить 20 — кратное 4). Дальше дополнять ходы соперника до 4.
3. Берут 1–4, последний проигрывает. Проигрышные позиции — остаток **1** при делении на 5 (оставить сопернику 1 камень — он обязан взять и проиграть; ключевые остатки 1, 6, 11, …). $15 = 5\cdot 3$, остаток 0 → В-позиция. **Выигрывает первый.** Первый ход: взять 4 (оставить 11). Дальше дополнять ходы соперника до 5.

4. Прибавляют 1–3 до 24. Шаг ключевых чисел $1+3 = 4$. Ключевые суммы: 4, 8, 12, 16, 20, 24 — кратные 4. Первый игрок не может сразу назвать 4 (максимум 3). Значит первое ключевое число (4) достанется тому, кто ходит **вторым**: что бы первый ни прибавил (1, 2 или 3), второй дополнит до 4. **Выигрывает второй**, дополняя суммы до кратных 4.
5. $5\times 7 = 35$ долек. Число разломов $= 35 - 1 = 34$ — чётное. Ходы 1, 2, …, 34; последний (34-й) делает **второй** игрок. **Выигрывает второй**, независимо от игры.
6. Да, может. После «промаха» первого второй кладёт монету в центр и дальше зеркалит ходы первого относительно центра — теперь уже у второго всегда есть ответный ход. **Перехват возможен**: выигрывает второй.
7. Берут 1–5, последний выигрывает. Проигрышные позиции — кратные $1+5 = 6$. $100 = 6\cdot 16 + 4$ — не кратно 6 → В-позиция. **Выигрывает первый.** Первый ход: взять 4 (оставить 96 — кратное 6). Дальше дополнять ходы соперника до 6.
8. Симметрия. У доски 7×7 есть настоящая центральная клетка — четвёртая по строке и столбцу. **Выигрывает первый.** Первым ходом он ставит короля точно в центр. Дальше он зеркалит: на любой ход соперника отвечает ходом в центрально-симметричную клетку (если соперник поставил короля на клетку (r,c), первый ставит на клетку $(8-r,,8-c)$). Такой ответ всегда корректен: симметричная клетка свободна (все короли, кроме центрального, стоят парами-зеркалами), и она не оказывается соседней ни с центральным королём, ни с только что поставленным (на 7×7 клетка и её зеркало всегда далеко друг от друга — можешь проверить сам на нескольких клетках). Значит у первого всегда есть ход, и проиграет тот, у кого хода не останется, — то есть второй.

Урок 8. Геометрия: углы, площади, разрезания

1. Смежный: $180° - 118° = 62°$. Вертикальный данному: 118°. Четвёртый: 62°. **Ответ: 118°, 62°, 118°, 62°.**
2. $x + 2x + 3x = 6x = 180°$, значит $x = 30°$. Углы: **30°, 60°, 90°.**
3. Сумма $= (10-2)\cdot 180° = 8\cdot 180° = 1440°$. Один угол правильного: $1440°/10 = 144°$. **Ответ: 1440° и 144°.**
4. $90° + 60° + 40° = 190° \ne 180°$. Сумма углов треугольника обязана быть 180°. **Такого треугольника нет.**
5. Простой способ: основание на оси длиной 5, высота от вершины $(2,4)$ до оси равна 4. Площадь $S = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4 = 10$. Теперь Пик — посчитаем узлы на границе Г. Удобный приём: на отрезке с концами в узлах число промежуточных узлов плюс один конец равно наибольшему общему делителю разностей координат. По сторонам: $(0,0)-(5,0)$ даёт $\text{НОД}(5,0)=5$; $(5,0)-(2,4)$ даёт $\text{НОД}(3,4)=1$; $(2,4)-(0,0)$ даёт $\text{НОД}(2,4)=2$. Сумма $5+1+2 = 8$ — это и есть число узлов на границе, Г $= 8$. Из формулы Пика найдём внутренние узлы: $В = S - \frac{Г}{2} + 1 = 10 - 4 + 1 = 7$. Проверка: $S = В + \frac{Г}{2} - 1 = 7 + 4 - 1 = 10$. Оба способа дали **10**. **Ответ: 10.**
6. $S = В + Г/2 - 1 = 6 + 10/2 - 1 = 6 + 5 - 1 = 10$. **Ответ: 10.**
7. Площадь каждой части $= 36/4 = 9$ клеток. Способы: (а) четыре полосы 6×1 (по три полосы… нет — четыре части по 9 клеток: полосы $1{,}5\times 6$ не годятся на клетке); удобнее: четыре прямоугольника 3×3 (квадраты), либо четыре уголка-«вертушки» из 9 клеток вокруг центра, либо две вертикальные и… Самые надёжные: **четыре квадрата 3×3**; **четыре Г-образные части «вертушкой»**; **четыре одинаковые ступенчатые части с поворотом на 90°**. Главное — каждая 9 клеток и поворотная симметрия на 90° помогает строить одинаковые части.
8. $(n-2)\cdot 180° = 1440° \Rightarrow n - 2 = 8 \Rightarrow n = 10$. Десятиугольник. Может ли сумма быть 1000°? Тогда $(n-2)\cdot 180° = 1000°$, $n-2 = 1000/180 = 5{,}55…$ — не целое. **Нет**, сумма углов многоугольника всегда кратна 180°, а 1000° на 180° не делится.

Урок 9. Процессы: переливания, взвешивания, переправы

1. 1 литр получается на шаге 4 примера 2: состояние (1; 5), в маленьком кувшине 1 литр. Кратко: наполнить 3-литровый, перелить в 5-литровый; снова наполнить 3-литровый и долить в 5-литровый до краёв — в маленьком останется $3 - 2 = 1$ литр. **Ответ: 1 л.**
2. Наполни 5-литровый; перелей в 3-литровый доверху — в большом останется $5 - 3 = 2$ литра. **Ответ: 2 л** (это состояние (3; 2) из шага 2 примера 1, в большом кувшине 2 л).
3. Кувшины 4 и 9. Один из путей: наполни 9-литровый (0; 9); перелей в 4-литровый (4; 5); вылей 4-литровый (0; 5); перелей 5 в 4-литровый, влезет 4, останется 1 → (4; 1); вылей 4-литровый (0; 1); перелей 1 в 4-литровый (1; 0); наполни 9-литровый (1; 9); долей в 4-литровый до краёв (влезет 3) → (4; 6). В 9-литровом **6 литров**.
4. 4 монеты, одна тяжелее. **Двух** взвешиваний достаточно (а одного мало: одно даёт 3 исхода, а вариантов 4). Схема: взвесь 2 против 2 — тяжёлая пара содержит фальшивую; затем в этой паре сравни монеты 1 против 1.
5. 3 монеты, одна тяжелее. **Одного** взвешивания хватит: положи монету 1 против монеты 2. Если одна тяжелее — она фальшивая; если равновесие — фальшивая третья. **Да, хватит.**
6. 27 монет. $3^3 = 27$ — то есть нужно (и хватает) **3 взвешивания**. Схема: дели на три группы по 9, взвешиванием находишь нужную девятку; потом по 3; потом по 1. Меньше нельзя: 2 взвешивания различают только 9 вариантов, а монет 27.
7. Нет, **меньше 7 рейсов не выйдет**. Из-за того, что коза враждует и с волком, и с капустой, без «возврата козы» не обойтись, и минимально нужно именно 7 переправ лодки. (Идея: каждый «полезный» перевоз груза туда требует возвратов, и подсчёт показывает минимум 7.)

8. 12 монет, неизвестно легче/тяжелее. Вариантов: 12 монет × 2 (легче/тяжелее) $= 24$, а $3^3 = 27 \ge 24$ — по информации **хватает 3 взвешиваний**. Рабочая схема (классика): пронумеруй монеты 1–12. **Взвешивание 1:** 1,2,3,4 против 5,6,7,8. **Взвешивание 2 и 3** подбираются в зависимости от исхода (равновесие → фальшивая среди 9,10,11,12, и за 2 оставшихся взвешивания её находят сравнениями с заведомо настоящими; неравновесие → известна «подозрительная» восьмёрка и направление перекоса, далее аккуратные перевзвешивания). Полная схема длинная — главное, что ты доказал: **по числу исходов трёх взвешиваний хватает**, и существует схема, которая и находит монету, и определяет, легче она или тяжелее.

Урок 10. Итоговая домашняя олимпиада

Разбор задачи 1. Рассмотрим два случая для Андрея.

Случай А: Андрей — рыцарь (говорит правду). Тогда его слова «Боря — лжец» истинны, значит **Боря — лжец**. Раз Боря лжец, его утверждение «Андрей и Вова одинаковые» **ложно**, то есть Андрей и Вова **разные**. Андрей рыцарь, значит Вова — лжец. Но проверим Вову: он сказал «Андрей — рыцарь» — это правда, а лжец не может сказать правду. Противоречие! Значит случай А невозможен.

Случай Б: Андрей — лжец. Тогда его слова «Боря — лжец» ложны, значит **Боря — рыцарь**. Боря (рыцарь) сказал правду: «Андрей и Вова одинаковые». Андрей — лжец, значит и Вова — лжец. Проверим Вову: он сказал «Андрей — рыцарь» — это ложь (Андрей лжец), а лжец и должен лгать. Всё сходится!

Ответ: Андрей — лжец, Боря — рыцарь, Вова — лжец.

Разбор задачи 2. Главное наблюдение — про **чётность суммы**. Какие бы знаки мы ни ставили, чётность результата совпадает с чётностью суммы всех чисел $1 + 2 + \dots + 2025$. Почему? Поставить «минус» перед числом a вместо «плюса» меняет результат на $2a$ — чётное число. А прибавление или вычитание чётного не меняет чётность. Значит чётность выражения всегда равна чётности обычной суммы.

Посчитаем сумму: $1 + 2 + \dots + 2025 = \dfrac{2025 \cdot 2026}{2} = 2025 \cdot 1013 = 2{,}051{,}325$. Это число **нечётное** (произведение двух нечётных чисел нечётно). А ноль — чётный. Нечётное выражение никогда не равно чётному нулю.

Ответ: нет, нельзя — сумма нечётна, а ноль чётен.

Разбор задачи 3. Это усиленный принцип Дирихле. «Ящики» — четыре возможные оценки: 2, 3, 4, 5. «Предметы» — 30 учеников, каждого кладём в ящик его оценки.

Предположим **обратное**: в каждом из четырёх ящиков не больше 7 учеников. Тогда всего учеников не больше $7 \cdot 4 = 28$. Но учеников 30, и $30 > 28$ — противоречие! Значит в каком-то ящике не меньше 8 учеников.

(Можно и формулой: при n предметах и k ящиках где-то будет не меньше $\lceil n/k \rceil$; здесь $\lceil 30/4 \rceil = \lceil 7{,}5 \rceil = 8$.)

Ответ: доказано — найдутся хотя бы 8 учеников с одинаковой оценкой.

Разбор задачи 4. Будем смотреть на остатки степеней двойки при делении на 7.

- $2^1 = 2$, остаток **2**.
- $2^2 = 4$, остаток **4**.
- $2^3 = 8 = 7 + 1$, остаток **1**.
- $2^4 = 2^3 \cdot 2$, остаток $1 \cdot 2 = 2$.

Остатки пошли по кругу: $2, 4, 1, 2, 4, 1, \dots$ — **цикл длины 3**. Значит остаток 2^n зависит только от остатка n при делении на 3:

- если n делится на 3 → остаток 1;
- если n даёт остаток 1 → остаток 2;
- если n даёт остаток 2 → остаток 4.

Для $n = 100$: $100 = 3 \cdot 33 + 1$, остаток 1. Значит остаток 2^{100} при делении на 7 такой же, как у 2^1, то есть **2**.

Ответ: 2.

Разбор задачи 5. Считаем четырёхзначные числа с разными цифрами и чётные. Чётность определяется **последней** цифрой: она должна быть из ${0, 2, 4, 6, 8}$. Удобно разобрать два случая по последней цифре, потому что ноль особенный (он не может стоять в начале).

Случай 1: последняя цифра — 0. Тогда первые три позиции заполняем разными цифрами из оставшихся девяти (1–9), причём первая позиция уже не имеет запрета на ноль (ноль занят). Число способов: на первую позицию 9 цифр, на вторую 8, на третью 7. Итого $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Случай 2: последняя цифра — одна из 2, 4, 6, 8 (4 варианта). Выберем последнюю цифру — 4 способа. Теперь первая цифра: она не может быть 0 и не может совпадать с уже использованной последней. Из 10 цифр исключаем 0 и одну занятую → 8 вариантов. Вторая цифра: любая из оставшихся, исключая две уже занятые → 8 вариантов (тут ноль уже разрешён). Третья цифра: исключаем три занятые → 7 вариантов. Итого $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 1792$.

Складываем случаи: $504 + 1792 = 2296$.

Ответ: 2296.

Разбор задачи 6. Это игра «отнимание камней», берут 1–3, последний выигрывает. Разберём с конца, помечая позиции по числу оставшихся камней.

- 0 камней: ходить нечем, ты проиграл (соперник взял последний). **П.**
- 1, 2, 3: забери все — победа. **В.**
- 4: что ни возьми (1–3), оставишь сопернику 3, 2 или 1 — всё В-позиции для него. Значит все ходы плохие. **П.**

Закономерность: **проигрышные позиции — кратные 4** (0, 4, 8, …, 28). Перед началом 30 камней. $30 = 4 \cdot 7 + 2$ — не кратно 4, это **выигрышная** позиция. Значит выигрывает **первый** игрок.

Стратегия первого: первым ходом оставить сопернику кратное 4. Ближайшее снизу — 28, значит первый берёт $30 - 28 = 2$ камня. Дальше первый всегда **дополняет ход соперника до 4**: если соперник взял k, первый берёт $4 - k$. После каждой пары ходов остаток уменьшается на 4, оставаясь кратным 4: $28

\to 24 \to 20 \to 16 \to 12 \to 8 \to 4 \to 0$. Последние камни заберёт первый — и победит.

Ответ: выигрывает первый; первым ходом берёт 2 камня (оставляет 28), затем дополняет каждый ход соперника до 4.