

# Урок 1. Логика и рассуждения

---

Математика · ~55 минут

## Что ты узнаешь

- Что такое утверждение и чем «истина» отличается от «лжи».
- Что значит «доказать», а не просто «угадать ответ».
- Как работает метод **от противного** — один из самых сильных приёмов в математике.
- Как решать задачи про **рыцарей и лжецов** и задачи **на соответствие** с помощью аккуратного перебора случаев.

## Разбираемся в теме

Представь, что ты попал на остров, где половина жителей всегда врёт, а другая половина никогда. Они не носят табличек «я честный» или «я обманщик» — выглядят все одинаково. И тебе нужно по одной-двум фразам вычислить, кто есть кто. Звучит как магия? А это просто логика. Хочешь научиться доказывать то, что кажется невозможным, и ловить хитрецов на слове? Поехали.


### Утверждение, истина и ложь

В математике мы всё время имеем дело с **утверждениями** — это предложения, про которые можно сказать: они верны (это **истина**) или неверны (это **ложь**).

Например:

- « $2 + 2 = 4$ » — истина.
- «5 — чётное число» — ложь.
- «Завтра пойдёт дождь» — это вообще **не** математическое утверждение: пока непонятно, истина это или ложь, и от математики тут ничего не зависит.

Важно: у настоящего утверждения нет «середины». Оно либо истинно, либо ложно. Третьего не дано. Это похоже на выключатель: лампа либо горит, либо нет.


 **А знаешь ли ты?** Целый раздел математики — математическую логику — придумали, чтобы машины могли «рассуждать». Внутри любого компьютера миллиарды крошечных выключателей, каждый из которых — это «истина» или «ложь» (1 или 0). Получается, твой телефон — это гора логических утверждений, которые носятся туда-сюда со скоростью света.

### Что значит «доказать»

Представь, что друг говорит тебе: «Я уверен, что среди любых 13 человек двое родились в один месяц». Ты можешь поверить, а можешь спросить: «А почему?»

**Доказать** — значит объяснить так убедительно, чтобы сомнений не осталось ни у кого, даже у самого вредного спорщика. Не «мне кажется», не «я попробовал три раза — получилось», а железная цепочка рассуждений.

Запомни главное правило олимпиад:

 **Запомни:** Ответ без объяснения — это ещё не решение. Даже если ответ верный, но ты не объяснил почему — задача не засчитана. Олимпиадного судью не интересует, что ты *знаешь* ответ, — ему важно, что ты можешь его *доказать*.

### Будь осторожен с выводами

Послушай рассуждение: «Все кошки — животные. Барсик — кошка. Значит, Барсик — животное.» Тут всё честно: вывод верный.

А теперь хитрее: «Все кошки — животные. Барсик — животное. Значит, Барсик — кошка.» Стоп! А вдруг Барсик — это собака? Или попугай? Из того, что Барсик животное, **не следует**, что он кошка. Вывод неправильный, хотя слова почти те же.

Вот за такими ловушками логика и следит: важно не только что сказано, но и **в какую сторону** работает рассуждение.

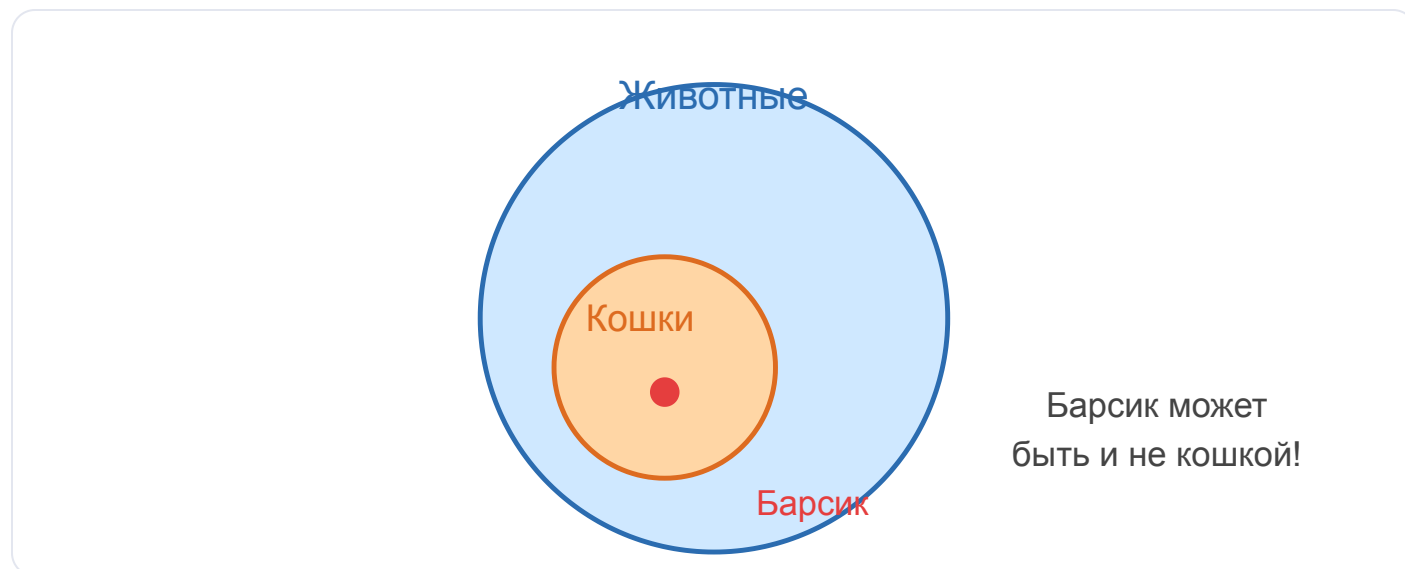



Рис. 1. Кошки внутри животных, но не любое животное — кошка

## Метод от противного

Это любимый приём математиков. Идея такая: мы хотим доказать какое-то утверждение. Мы **предполагаем, что оно неверно** (то есть берём противоположное), и аккуратно рассуждаем дальше. Если приходим к полной нелепости (например, « $5 = 6$ » или «число одновременно чётное и нечётное») — значит, наше предположение было ошибкой. А раз противоположное невозможно — значит, верно исходное утверждение.

Жизненная аналогия. Ты думаешь: «Наверное, дома кто-то есть». Проверяешь: «Если бы дома кто-то был, то свет был бы включён. Но свет выключен. Значит, дома никого нет.» Ты предположил обратное (кто-то есть) и упёрся в противоречие со свечкой — и сделал правильный вывод.

 **Лайфхак:** Метод от противного особенно силён, когда тебя просят доказать, что чего-то **не может быть** или что что-то **единственное**. Слова «невозможно», «не существует», «только один» — это почти всегда сигнал: пробуй от противного.

## Рыцари и лжецы

Есть волшебный остров. На нём живут два племени:

- **Рыцари** — всегда говорят только правду.
- **Лжецы** — всегда лгут (любая их фраза ложна).

Каждый житель — либо рыцарь, либо лжец, серединок нет. Задача — по их словам понять, кто есть кто. Это идеальная тренировка логики, потому что тут работает чистый перебор случаев: предположим, что человек рыцарь — посмотрим, сходится ли; предположим, что лжец — снова проверим.



### Разбор примеров

**Пример 1.** Встретились двое жителей острова. Первый сказал: «Мы оба лжецы». Кто из них кто?

🕒 Попробуй сам прямо сейчас: представь, что первый — рыцарь. Может ли честный человек сказать «мы оба лжецы»? Потом читай дальше.

*Как рассуждаем.* Никто не подсказывает, кто перед нами, — значит, перебираем варианты сами. Разберём, кем может быть первый.

- Допустим, первый — **рыцарь**. Тогда его слова — правда, то есть «мы оба лжецы» — истина. Но рыцарь не может быть лжецом! Противоречие. Значит, рыцарем первый быть не может.
- Значит, первый — **лжец**. Тогда его фраза «мы оба лжецы» ложна. Что значит «неправда, что оба лжецы»? Это значит, что хотя бы один из них — не лжец. Сам первый — лжец, поэтому не-лжецом должен быть второй. Значит, второй — рыцарь.

**Ответ:** первый — лжец, второй — рыцарь.

**Пример 2.** Снова двое. А говорит: «В — рыцарь». В говорит: «Мы с А разные» (то есть один рыцарь, другой лжец). Кто они?

*Как рассуждаем.* Та же хитрость: цепляемся за одного героя (пусть это А) и проверяем обе его возможности.

- Пусть А — **рыцарь**. Тогда его слова правдивы: В — рыцарь. Раз В рыцарь, его слова тоже правда: «мы разные». Но мы только что получили, что оба рыцари — значит, они одинаковые! Противоречие. Значит, А не рыцарь.
- Значит, А — **лжец**. Тогда его фраза «В — рыцарь» ложна, то есть В — лжец. Проверим слова В: «мы разные». Но оба оказались лжецами — значит, они одинаковые, и фраза «мы разные» ложна. А лжец и должен лгать — всё сходится!

**Ответ:** оба лжецы.

**Пример 3.** Трое жителей. Каждый сказал про двух остальных: «Эти двое — лжецы». Сколько среди них лжецов?

*Как рассуждаем.* Когда жителей много, перебирать «кто рыцарь» по одному долго. Хитрее спросить: а сколько вообще может быть рыцарей? Проверим количества.

- Если бы было два рыцаря, то один рыцарь сказал бы про другого рыцаря «он лжец» — а рыцарь не лжёт. Противоречие. Значит, рыцарей не больше одного.
- Может ли быть ноль рыцарей (все трое лжецы)? Тогда любой из них говорит «остальные двое лжецы». Но это правда (остальные ведь действительно лжецы)! А лжец не может сказать правду. Противоречие. Значит, ноль рыцарей не подходит.
- Остаётся ровно один рыцарь. Проверим: рыцарь говорит про двух остальных «они лжецы» — и это правда, они действительно лжецы. Хорошо. А каждый лжец говорит «остальные двое лжецы», но среди этих двух есть рыцарь — значит, фраза ложна. Лжец и должен лгать. Всё сходится!

Итак, рыцарь один, а лжецов — двое.

**Ответ:** два лжеца (и один рыцарь).

**Пример 4.** На двери три таблички. Известно, что **ровно одна** из них говорит правду. За какой-то дверью приз — точнее, надписи такие:

- Табличка №1: «Приз за дверью №2».
- Табличка №2: «Приз НЕ за этой дверью» (то есть не за №2).
- Табличка №3: «Приз НЕ за дверью №1».

Где приз?

🕒 Попробуй сам: предположи, что правдива только табличка №1, и проверь, не «проболтаются» ли другие. Потом читай дальше.

*Как рассуждаем.* Раз правдива ровно одна табличка, не будем гадать про двери — будем перебирать, какая именно табличка честная. Их всего три, проверим все.

- Пусть правдива только №1. Тогда приз за дверью №2. Но проверим №3: «приз не за дверью №1» — раз приз за №2, это тоже правда. Получилось две правдивые таблички. Не подходит (должна быть одна).
- Пусть правдива только №2. Тогда приз не за №2. №1 («приз за №2») ложна — хорошо, согласуется. №3 («приз не за №1») должна быть ложной, значит приз за дверью №1. Проверим: приз за №1 — не за №2, значит №2 правдива (верно), №1 ложна (верно), №3 ложна (верно). Ровно одна правдивая! Подходит.
- Для надёжности проверим третий случай. Пусть правдива только №3: «приз не за №1». Тогда №2 ложна, значит приз ЗА дверью №2. Но тогда №1 («приз за №2») правдива — получаются две правдивые. Не подходит.

Только второй случай дал ровно одну правдивую табличку.

**Ответ:** приз за дверью №1.

**Пример 5.** Три друга — Аня, Боря и Витя — занимаются разными видами спорта: футбол, шахматы, плавание (каждый одним, все разные). Известно: Аня не футболист; Витя не шахматист и не футболист. Кто чем занимается?

*Как рассуждаем.* Тут не про вранье, а про соответствие «кто-что». Когда вариантов много, держать всё в голове трудно — поэтому рисуем табличку: строки — имена, столбцы — виды спорта, ставим «нет», где точно не может быть.

	Футбол	Шахматы	Плавание
Аня	нет		
Боря			
Витя	нет	нет	

- Смотрим на Витю: ему запрещены футбол и шахматы. Остаётся только **плавание**. Значит, Витя — пловец.
- Раз плавание занял Витя, у Ани и Бори остаются футбол и шахматы. Но Аня не футболист, значит Аня — **шахматы**.
- Боре достаётся последнее — **футбол**.


**Ответ:** Витя — плавание, Аня — шахматы, Боря — футбол.

**Пример 6.** Может ли житель острова (рыцарь или лжец) сказать про себя: «Я лжец»?

*Как рассуждаем.* Снова всего два варианта — проверим оба, как детектив проверяет алиби.

- Если это рыцарь, то его слова правда, и тогда он действительно лжец. Но рыцарь — не лжец. Противоречие.
- Если это лжец, то его слова ложь, и тогда неправда, что он лжец, то есть он рыцарь. Но лжец — не рыцарь. Снова противоречие.

Ни один житель острова так сказать не может! Если кто-то это произнёс — значит, он вообще не житель острова (например, заблудившийся турист).

 **А знаешь ли ты?** Фраза «я лжец» — это знаменитый **парадокс лжеца**, ему больше двух тысяч лет. Над ним ломали головы древние греки, а в XX веке он помог математику Курту Гёделю доказать одну из самых поразительных теорем в истории: в любой достаточно богатой системе

правил всегда найдутся утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

**Ответ:** ни рыцарь, ни лжец так сказать не может — это противоречивая фраза для жителей острова.

### **Запомни главное**

**Перебор случаев** — твой главный инструмент в логике: рассмотри ВСЕ возможности по очереди и отбрось те, что приводят к противоречию.

- Утверждение — это либо истина, либо ложь, середины нет.
- «Доказать» = объяснить так, чтобы не подкопался даже спорщик. Ответ без объяснения не считается.
- **Метод от противного:** предположи обратное, дойди до нелепости — значит, обратное невозможно, верно исходное.
- Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжёт. Подставь каждую гипотезу и проверь, нет ли противоречия.
- В задачах на соответствие рисуй **таблицу** и вычёркивай невозможное — ответ часто «выпадает» сам.

### **Домашнее задание**

1. Один житель острова сказал: «Я рыцарь». Можно ли по этой фразе понять, кто он?
2. Встретились двое. Первый сказал: «Хотя бы один из нас лжец». Кто из них кто?
3. А сказал: «В — лжец». В сказал: «А — лжец». Что можно сказать про этих двоих?

4. Четыре друга — Маша, Даша, Гриша и Лёша — выбрали разные кружки: рисование, музыку, робототехнику и танцы. Маша не на музыке и не на танцах. Гриша на робототехнике. Даша не на рисовании. Кто куда ходит?
5. На столе три коробки. На одной написано «Конфеты», на другой «Печенье», на третьей «Конфеты или печенье». Известно, что НИ одна надпись не соответствует тому, что внутри, и что в коробках действительно по-разному: конфеты, печенье и пустая. Что в каждой коробке?
6. Докажи от противного: если сумма двух целых чисел нечётна, то одно из них чётное, а другое нечётное. (Подсказка из будущего урока: чётное + чётное = чётное, нечётное + нечётное = чётное.)
7. Трое подсудимых, известно, что солгал ровно один. Антон: «Я не виноват». Борис: «Виноват Антон». Виктор: «Я не виноват». Кто виноват, если виноват ровно один человек?
8. ★ Пятеро жителей острова встали в круг, и каждый сказал про своего соседа справа: «Он такой же, как я» (то есть «мы с ним из одного племени»). Сколько лжецов может быть среди них? Перечисли все возможности.