

Урок 2. Чётность

Математика · ~55 минут

Что ты узнаешь

- Что такое чётные и нечётные числа и как они складываются и умножаются.
- Почему чётность — это супер-инструмент для доказательства, что что-то **невозможно**.
- Что такое **инвариант** — величина, которая не меняется при действиях.
- Как чётность работает в задачах про шахматную доску, домино, кузнечика и шестерёнки.

Разбираемся в теме

Фокус: дай мне любую шахматную доску, отрежь от неё два уголка по диагонали — и я, даже не глядя на доску, поклянусь, что её НЕ получится замостить костяшками домино. И окажусь прав на 100%, всегда. Как я это знаю заранее? У меня есть секретное оружие, которое называется **чётность**. С виду — детский сад («чётное, нечётное»), а на деле — один из самых хитрых приёмов олимпиадной математики. Сейчас научишься.

Чётные и нечётные

Чётные числа — это те, что делятся на 2 без остатка: 0, 2, 4, 6, 8, 10, ... Их можно разбить на пары без остатка (8 конфет раздать поровну двоим — по 4, всё чисто).

Нечётные — те, что на 2 не делятся: 1, 3, 5, 7, 9, ... При делении на 2 остаётся «лишняя» единица (7 конфет на двоих — по 3 и одна лишняя).

Любое целое число — либо чётное, либо нечётное. Середины нет, прямо как с истиной и ложью из прошлого урока.

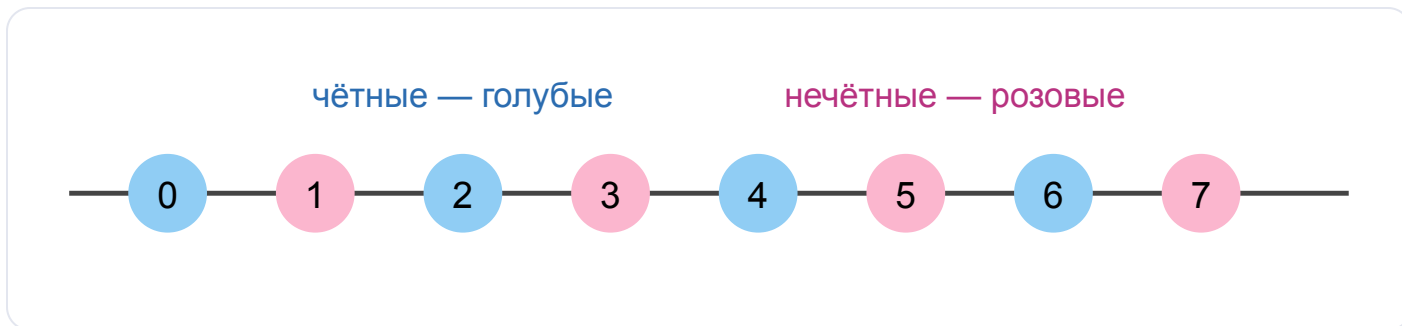


Рис. 1. На числовой прямой чёт и нечёт идут строго по очереди

Главные правила (выучи их как таблицу умножения!)

Сложение и вычитание:

Действие	Результат
чёт + чёт	чёт
нечёт + нечёт	чёт
чёт + нечёт	нечёт

Заметь самое неожиданное: **нечётное плюс нечётное даёт чётное!** $3 + 5 = 8$, $7 + 7 = 14$. Лишние единички встретились и образовали пару.

Для вычитания правила точно такие же (минус ведёт себя как плюс по части чётности): нечёт – нечёт = чёт, и так далее.

Умножение:

Действие	Результат
чёт · что угодно	чёт
нечёт · нечёт	нечёт


Произведение чётно, если есть **хотя бы один** чётный множитель. Чтобы произведение было нечётным, нужно, чтобы **ВСЕ** множители были нечётными.

Лайфхак: Не зубри эти таблицы как стихи. Представь, что чёт — это «есть пара всем», а нечёт — «один лишний». Складываешь два «лишних» —

они находят друг друга в пару, получается чёт. Вот и всё правило нечёт + нечёт = чёт, выводится за секунду.

Маленький секрет про сумму многих чисел

Сложим несколько чисел. Чётные слагаемые на чётность суммы не влияют вообще (можешь их мысленно выкинуть). Всё решают **нечётные** слагаемые. И тут правило:

 **Запомни:** Сумма нескольких чисел чётна тогда и только тогда, когда среди них **чётное число нечётных** слагаемых.


Например: $3 + 5 + 4 + 7$. Нечётных слагаемых три штуки (3, 5, 7) — нечётное количество — значит, сумма нечётна. Проверим: $3+5+4+7 = 19$. Верно, нечётно!

Чётность как инвариант

Слово **инвариант** означает «то, что не меняется». В задачах часто что-то делают по шагам (прыгают, переворачивают, переключают), и спрашивают: «А можно ли прийти к такому-то результату?»

Хитрость в том, чтобы найти величину, которая при каждом шаге либо вообще не меняется, либо меняется предсказуемо (например, всегда переключается чёт↔нечёт). Тогда мы можем сравнить «что было в начале» и «что хотят получить» — и если по чётности они не совпадают, то добраться **невозможно**, как ни старайся.

Аналогия. Если ты выходишь из дома и каждый шаг — это либо «этаж вверх», либо «этаж вниз» на один этаж, то после нечётного числа шагов ты НЕ можешь оказаться на том же этаже, откуда вышел. Потому что чётность твоего этажа меняется с каждым шагом.

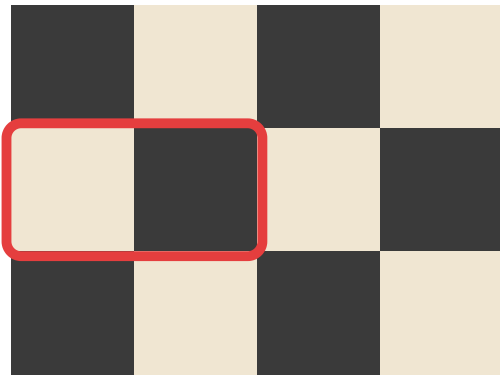
 **А знаешь ли ты?** Инварианты — это «закон сохранения» в математике, точь-в-точь как в физике сохраняется энергия. Если какая-то величина не может измениться, то всё, что её бы изменило, попросту невозможно. Этим

приёмом пользуются даже при разработке компьютерных игр: чтобы доказать, что головоломка решается (или нет!), ищут как раз инвариант.

Шахматная доска и домино

Шахматная доска раскрашена в два цвета в шахматку. Главное свойство: соседние клетки (у которых общая сторона) всегда **разного** цвета.

Костяшка домино 1×2 накрывает ровно две соседние клетки — значит, всегда одну белую и одну чёрную. Это наблюдение решает кучу задач: если нам нужно покрыть доску костяшками, то белых и чёрных клеток должно быть поровну.




домино = 1 белая + 1 чёрная

Соседние клетки
всегда разного
цвета!

Рис. 2. Любая костяшка домино накрывает одну белую и одну чёрную клетку

Разбор примеров

Пример 1. Можно ли разменять 25 рублей десятью монетами достоинством 1, 3 и 5 рублей?

 Попробуй сам прямо сейчас: что общего у чисел 1, 3 и 5? Подумай про их чётность, потом читай дальше.

Как рассуждаем. Глаз сразу цепляется: 1, 3, 5 — все нечётные! Значит, мы складываем десять нечётных чисел. По правилу: сумма чётна, когда нечётных слагаемых чётное количество. У нас 10 нечётных слагаемых — это чётное количество — значит, сумма обязательно **чётная**. А 25 — нечётное число. Чётное никогда не равно нечётному. Значит, никак не получится.

Ответ: нельзя.

Пример 2. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 10. Можно ли перед каждым поставить «+» или «-» так, чтобы в итоге получился 0?

Как рассуждаем. Расстановок знаков очень много, перебирать — безнадежно. Ищем то, что от знаков НЕ зависит. И вот оно: когда мы меняем «+» на «-» перед числом, мы меняем результат, но **чётность** результата от этого не зависит! Почему? Потому что $+a$ и $-a$ имеют одинаковую чётность (5 и -5 оба нечётные). Значит, чётность итоговой суммы такая же, как чётность обычной суммы $1+2+\dots+10$.

Посчитаем: $1+2+\dots+10 = 55$ (это сумма, можно сложить парами: $1+10=11$, $2+9=11$, ..., всего 5 пар по 11, итого 55). Число 55 — нечётное. Значит, при любой расстановке знаков результат будет нечётным. А 0 — чётное число. Не сходится!

Ответ: нельзя.

Пример 3. Кузнечик прыгает по числовой прямой: за каждый прыжок сдвигается ровно на 1 влево или на 1 вправо. Может ли он через 11 прыжков вернуться в точку старта?

Как рассуждаем. Пусть он сделал несколько прыжков вправо и несколько влево, а всего 11. Чтобы вернуться в начало, число прыжков вправо должно равняться числу прыжков влево (сколько ушёл туда — столько вернулся). Значит, вправо и влево поровну, пусть по k раз. Тогда всего прыжков $2k$ — это чётное число. А 11 нечётно. Чётное число прыжков не может равняться 11.

Можно сказать короче через инвариант: после каждого прыжка чётность координаты кузнечика меняется (был на чётной — стал на нечётной, и наоборот). Старт в точке 0 (чётная). Чтобы вернуться в чётную точку 0, нужно чётное число «переключений», то есть чётное число прыжков. 11 не подходит.

Ответ: нет, не может (нужно чётное число прыжков).

Пример 4. Шахматный конь вышел с какого-то поля, погулял и вернулся обратно ровно за 2025 ходов. Возможно ли это?

Как рассуждаем. Большое некрасивое число 2025 — это сигнал: считать руками бессмысленно, ищем инвариант. Тут спасает шахматная раскраска. Знаменитое свойство коня: каждым ходом он попадает на клетку **другого** цвета (если стоял на белой — прыгнет на чёрную, и наоборот). Это легко проверить: ход коня «буквой Г» всегда меняет цвет.

Значит, цвет клетки под конём — это наш инвариант, который переключается каждый ход. Чтобы вернуться на исходную клетку (того же цвета!), нужно чётное число переключений, то есть чётное число ходов. А 2025 — нечётное.

Ответ: нет, невозможно (нужно чётное число ходов).

Пример 5. Девять одинаковых шестерёнок соединены в цепочку и замкнуты в кольцо (зубчик к зубчику, по кругу). Смогут ли они вращаться?

Как рассуждаем. Вспомним простой факт: когда две шестерёнки сцеплены, они крутятся в **разные** стороны (одна по часовой — соседняя против часовой). Пойдём по кольцу: 1-я по часовой, 2-я против, 3-я по часовой, 4-я против... То есть направление чередуется — ровно как чёт/нечёт! У нечётных номеров — одно направление, у чётных — другое.

Шестерёнок 9. Девятая (нечётный номер) должна крутиться «по часовой», как 1-я, 3-я и т.д. Но 9-я сцеплена с 1-й (кольцо замкнулось!), а сцепленные крутятся в разные стороны — значит, 9-я должна крутиться против часовой. Получилось, что 9-я обязана крутиться сразу в обе стороны — это невозможно. Значит, всё кольцо заклинит.

Корень проблемы — нечётное число шестерёнок в кольце. При чётном числе всё было бы хорошо.

Ответ: нет, не будут крутиться (заклинит из-за нечётного кольца).

Пример 6. Из шахматной доски 8×8 вырезали две клетки в противоположных углах (по диагонали). Можно ли оставшиеся 62 клетки полностью замостить

костяшками домино 1×2 (без наложений и без выхода за доску)?

Как рассуждаем. Сначала наивно: всего было 64 клетки, убрали 2, осталось 62, а одна костяшка накрывает 2 клетки, значит нужно 31 костяшка. По количеству вроде сходится. Но это ещё не доказательство, что можно!

Теперь хитрость с цветом. Противоположные углы доски — **одного цвета** (проверь на любой доске: угол a_1 и угол h_8 оба, скажем, чёрные). Мы вырезали две клетки одного цвета. Значит, осталось 32 клетки одного цвета и 30 клеток другого.

Но каждая костяшка домино накрывает ровно одну белую и одну чёрную клетку! Значит, сколько бы костяшек мы ни положили, белых и чёрных они накроют **поровну**. А у нас их не поровну: 32 и 30. Покрыть невозможно.

Вот он, тот самый фокус из начала урока: я был уверен заранее, даже не глядя на доску, потому что углы по диагонали всегда одного цвета.

Ответ: нельзя (углы одного цвета, остаётся 32 и 30 клеток, а домино требует поровну).



Запомни главное

Чтобы доказать, что что-то **невозможно**, найди подходящую **чётность** (или другой инвариант) — и покажи, что «начало» и «цель» по чётности не совпадают.

- Чёт \pm чёт = чёт; нечёт \pm нечёт = чёт; чёт \pm нечёт = нечёт.
- Сумма многих чисел чётна \Leftrightarrow среди них **чётное число нечётных** слагаемых.
- Произведение чётно, если есть хоть один чётный множитель.
- Знак «+» или «-» перед числом **не меняет** чётность суммы.
- Шахматная раскраска: соседние клетки разного цвета; домино накрывает 1 белую + 1 чёрную; конь меняет цвет каждым ходом.

- Чтобы вернуться в исходное состояние при чередующемся инварианте, нужно **чётное** число шагов.



Домашнее задание

1. Сумма семи нечётных чисел — чётная или нечётная? А произведение этих семи чисел?
2. Можно ли набрать ровно 100 рублей, используя ровно 9 монет достоинством 1, 5 и 25 рублей?
3. На доске числа 1, 2, 3, ..., 9. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы получилось 0?
4. Кузнечик прыгает по прямой на 2 вправо или на 3 влево. Может ли он после нескольких прыжков впервые вернуться в начало, сделав 5 прыжков? (Подумай про общую сумму сдвигов.)
5. В ряд лежат 7 монет орлом вверх. За один ход разрешается перевернуть ровно 2 монеты (любые). Можно ли за несколько ходов добиться, чтобы все 7 монет легли решкой вверх?
6. На шахматной доске 8×8 стоит конь на поле $a1$. Может ли он за 63 хода обойти все 64 клетки, побывав на каждой ровно один раз? (Подумай про цвета клеток в начале и конце пути.)
7. Можно ли замостить костяшками домино 1×2 доску размером 5×5 ?
8. ★ В строке записаны числа от 1 до 20. За один ход можно стереть любые два числа и вместо них записать их **разность** (из большего вычесть меньшее, результат неотрицательный). Так делают, пока не останется одно число. Может ли последнее число быть равно 0? А чётным?