

Урок 4. Делимость и остатки

Математика · ~55 минут

Что ты узнаешь

- Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10 — и почему они работают (а не просто «так надо»).
- Что такое остаток и как остатки складываются и умножаются.
- Как находить последнюю цифру больших степеней вроде 7^{100} .
- Как с помощью остатков доказывать, что чего-то быть не может.

Разбираемся в теме

Назови любое огромное число — хоть 7^{100} , в котором почти сотня знаков. Я скажу его последнюю цифру за пять секунд, без всякого калькулятора (это, кстати, 1 — проверь потом). Звучит как суперспособность? На самом деле это просто магия остатков: оказывается, чтобы узнать что-то важное про гигантское число, часто хватает крошечного остатка. Сейчас ты получишь эту суперспособность сам.

Что значит «делится»

Число a **делится** на число b , если при делении не остаётся остатка (a нацело разбивается на кусочки по b). Например, 12 делится на 3 ($12 = 3 \cdot 4$), а 13 на 3 не делится ($13 = 3 \cdot 4 + 1$, остаётся 1).

Признаки делимости — это быстрые способы проверить делимость, не выполняя само деление. Но мы не будем зубрить их вслепую — разберёмся, ПОЧЕМУ они работают. Понятый признак не забудешь.

Откуда вообще берутся признаки: разложение числа

Любое число можно расписать по разрядам. Например: $\$3,572 = 3000 + 500 + 70 + 2 = 3 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2.$

Это и есть ключ ко всему. Дальше мы будем смотреть, что происходит с каждым кусочком при делении.

Признаки на 2, 5, 10 — смотрим на конец

Числа 10, 100, 1000 и так далее делятся на 2, на 5 и на 10. А значит, все разряды, кроме последнего (единиц), на эти числа делятся. Остаётся только последняя цифра.

- **Делимость на 2:** число чётное \Leftrightarrow его последняя цифра 0, 2, 4, 6 или 8. (Все «десятки» уже чётные, решает только цифра единиц.)
- **Делимость на 5:** число делится на 5 \Leftrightarrow последняя цифра 0 или 5.
- **Делимость на 10:** \Leftrightarrow последняя цифра 0.
- **Делимость на 4:** тут чуть хитрее. 100 делится на 4, значит сотни, тысячи и т.д. на 4 делятся. Решают **две последние** цифры. Число делится на 4 \Leftrightarrow число из его двух последних цифр делится на 4. Например, 1316: смотрим на 16, оно делится на 4 — значит, и 1316 делится.

Признаки на 3 и 9 — складываем цифры

Это самые красивые признаки. Секрет — в том, что 9, 99, 999 и так далее делятся на 9 (и на 3).

Распишем число, скажем, 372: $\$372 = 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2.$ Хитрый ход: заменим 100 на $99+1$, а 10 на $9+1$: $\$372 = 3 \cdot (99+1) + 7 \cdot (9+1) + 2 = (3 \cdot 99 + 7 \cdot 9) + (3 + 7 + 2).$


Первая скобка делится на 9 (там везде множители 99 и 9). Значит, делимость всего числа на 9 зависит только от второй скобки — а это **сумма цифр** $3+7+2 = 12!$

Отсюда:

- **Делимость на 9:** число делится на 9 \Leftrightarrow сумма его цифр делится на 9.

- **Делимость на 3:** число делится на 3 \Leftrightarrow сумма его цифр делится на 3 (то же рассуждение, ведь 9, 99, ... делятся и на 3).

Проверим 372: сумма цифр 12, она делится на 3, но не на 9. Значит, 372 делится на 3, но не на 9. И правда: $372 = 3 \cdot 124$.

 **А знаешь ли ты?** Этот трюк с суммой цифр когда-то использовали бухгалтеры для проверки расчётов — приём назывался «выбрасывание девяток». Если в столбике сложения сумма цифр результата не сходится с тем, что должно получиться, значит, где-то закралась ошибка. Дешёвый и быстрый детектор опечаток без всякого компьютера.


Остатки

Когда число не делится нацело, остаётся остаток. Запись: «33 даёт остаток 3 при делении на 5», потому что $33 = 5 \cdot 6 + 3$. Остаток всегда меньше делителя и не отрицательный.

Самое волшебное: **остатки можно складывать и умножать**. Чтобы узнать остаток суммы или произведения, можно сначала взять остатки слагаемых/множителей, а потом сложить/перемножить уже их (и при необходимости снова взять остаток).

Пример. Какой остаток даёт $23 \cdot 14$ при делении на 5? Остаток 23 при делении на 5 равен 3, остаток 14 равен 4. Перемножаем остатки: $3 \cdot 4 = 12$, его остаток при делении на 5 равен 2. Значит, и $23 \cdot 14$ даёт остаток 2. (Проверка: $23 \cdot 14 = 322 = 5 \cdot 64 + 2$. Верно!)

Это сильно упрощает жизнь: вместо огромных чисел можно работать с маленькими остатками.

 **Лайфхак:** Остатки — это «часовая арифметика». На циферблате после 12 идёт снова 1, а не 13: часы считают по модулю 12. Если сейчас 10 часов и пройдёт 5 часов, будет не 15, а 3 — ты просто взял остаток. Каждый раз, когда смотришь на часы, ты пользуешься остатками, даже не зная этого.

Последняя цифра степени

«Последняя цифра» — это остаток при делении на 10. А раз остатки умножаются, последняя цифра степени зависит только от последних цифр сомножителей.

Поэтому последние цифры степеней идут **по кругу** (циклами). Это мы разберём в примерах — приём очень полезный.

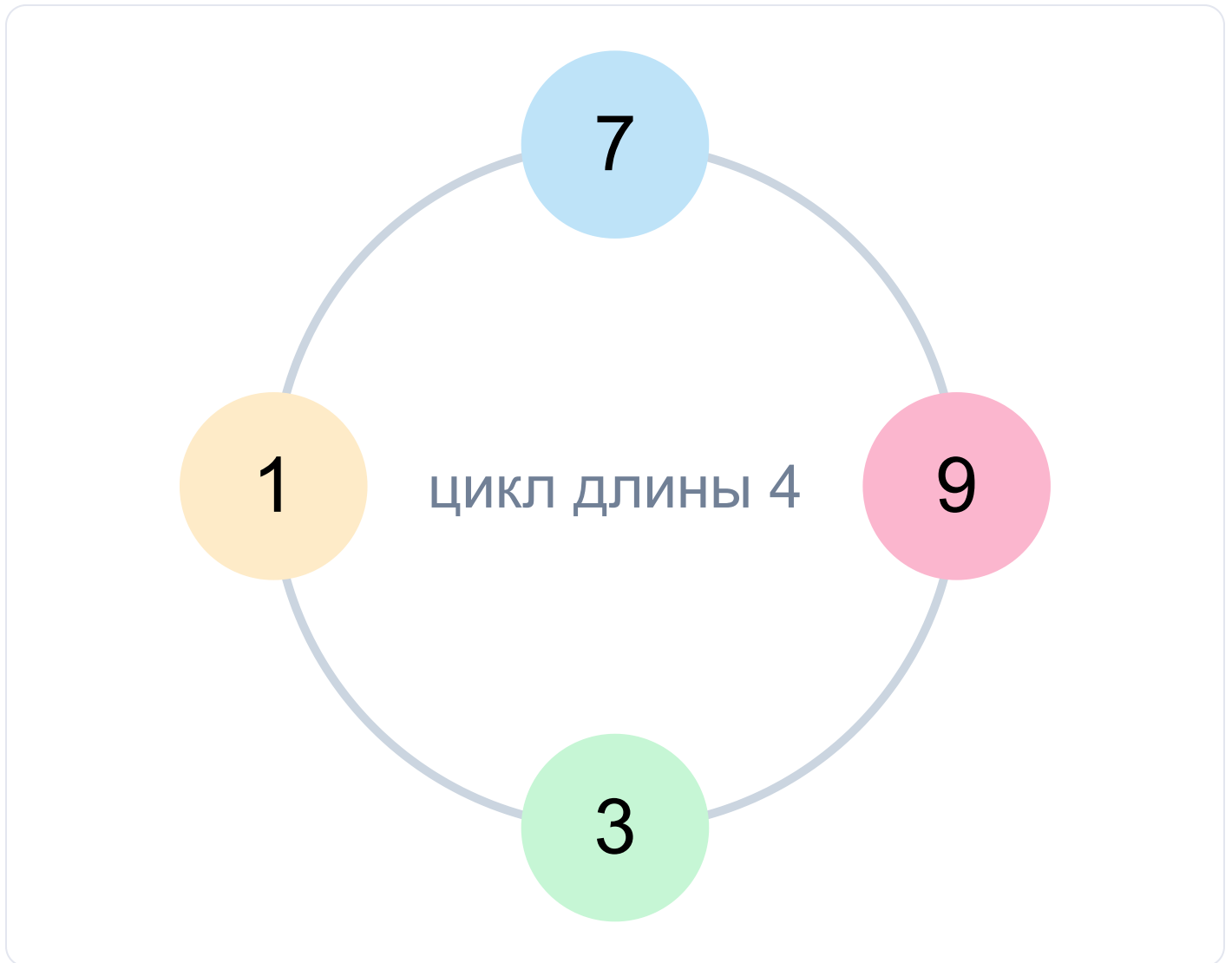


Рис. 1. Последние цифры степеней семёрки: 7, 9, 3, 1 и снова по кругу

Разбор примеров

Пример 1. Вместо звёздочки в числе 5^*2 поставь цифру так, чтобы число делилось на 9. Все ли варианты ты нашёл?

🕒 Попробуй сам прямо сейчас: какой признак делимости на 9 ты знаешь?
Запиши сумму цифр через звёздочку, потом читай дальше.

Как рассуждаем. По признаку делимости на 9 нам нужна сумма цифр, делящаяся на 9. Сумма цифр: $5 + * + 2 = 7 + .$ Нужно, чтобы $7 + *$ делилось на 9. Цифра $*$ — от 0 до 9, значит $7 + *$ меняется от 7 до 16. В этом промежутке на 9 делится только число 9. Значит, $7 + * = 9$, откуда $* = 2$. Число 522.

Проверим: $5+2+2 = 9$, делится на 9. И правда, $522 = 9 \cdot 58$.

Ответ: $* = 2$, число 522 (единственный вариант).

Пример 2. Докажи, что число $10^n - 1$ (то есть единица с n нулями минус один) всегда делится на 9.

Как рассуждаем. Лучший способ понять незнакомое выражение — посчитать его на маленьких числах. $10^1 - 1 = 9$, $10^2 - 1 = 99$, $10^3 - 1 = 999$, ..., $10^n - 1 = 99...9$ (ровно n девяток). Ага, это просто строчка из девяток! Сумма цифр такого числа равна $9 \cdot n$ — она делится на 9. По признаку делимости на 9 само число делится на 9.

Ответ: доказано ($10^n - 1 = 99...9$, сумма цифр $9n$ кратна 9).

Пример 3. Какой цифрой оканчивается число 7^{100} ?

Как рассуждаем. Возводить 7 в сотую степень руками — безумие. Но последняя цифра — это остаток при делении на 10, а он зависит только от последних цифр. Выпишем последние цифры степеней семёрки и поймаем закономерность:

- $7^1 = 7 \rightarrow$ последняя цифра 7
- $7^2 = 49 \rightarrow 9$
- $7^3 = ...3$ ($9 \cdot 7 = 63$) $\rightarrow 3$
- $7^4 = ...1$ ($3 \cdot 7 = 21$) $\rightarrow 1$
- $7^5 = ...7$ ($1 \cdot 7 = 7$) $\rightarrow 7$, и всё повторяется!

Цикл: **7, 9, 3, 1**, длина цикла 4. Дальше всё идёт по кругу. Чтобы узнать, где в цикле стоит 7^{100} , делим показатель 100 на длину цикла 4: $100 = 4 \cdot 25$, остаток 0.

Остаток 0 означает, что мы попадаем в конец цикла — на 4-ю позицию, где стоит цифра 1.

(Проверь на маленьком: 7^4 оканчивается на 1, 7^8 тоже на 1 — везде, где показатель кратен 4, последняя цифра 1.)

Ответ: 1.

Пример 4. Найди остаток от деления 2^{2025} на 3.

Как рассуждаем. Та же идея, что и с последней цифрой, только теперь делим не на 10, а на 3. Работаем с остатками по модулю 3. Остаток числа 2 при делении на 3 равен 2 (а можно сказать «равен -1 », это то же самое, что 2, ведь $-1 + 3 = 2$ — иногда удобнее считать с -1). Посмотрим на остатки степеней двойки при делении на 3:

- $2^1 \rightarrow$ остаток 2
- $2^2 = 4 \rightarrow$ остаток 1
- $2^3 = 8 \rightarrow$ остаток 2
- $2^4 = 16 \rightarrow$ остаток 1, ...

Цикл: **2, 1**, длина 2. Чётные степени дают остаток 1, нечётные — остаток 2. Показатель 2025 нечётный, значит остаток 2.

(Через -1 ещё короче: $2 \equiv -1$, значит $2^{2025} \equiv (-1)^{2025} = -1 \equiv 2$ по модулю 3.)

Ответ: 2.

Пример 5. Докажи, что квадрат любого целого числа при делении на 4 даёт остаток только 0 или 1.

Как рассуждаем. «Любое целое число» — это бесконечно много чисел, перебрать нельзя. Но их можно разбить на два типа: чётные и нечётные. Разберём оба случая, и этого хватит на всех.

- Если число чётное, его можно записать как $2k$. Тогда квадрат: $(2k)^2 = 4k^2$. Это явно делится на 4 — остаток 0.
- Если число нечётное, его можно записать как $2k+1$. Тогда квадрат: $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$. Первая часть делится на 4, остаётся остаток 1.

Других случаев нет. Значит, квадрат всегда даёт остаток 0 или 1 при делении на 4.

Ответ: доказано (чётное \rightarrow 0, нечётное \rightarrow 1; остатков 2 или 3 у квадратов не бывает).

Пример 6. Может ли сумма квадратов трёх целых чисел давать остаток 3 при делении на 4? (Например, может ли она равняться числу вида $4m+3$?)

Как рассуждаем. У нас уже есть готовый инструмент из примера 5: каждый квадрат при делении на 4 даёт остаток 0 или 1. У нас три квадрата, их остатки — каждый из $\{0, 1\}$. Остаток суммы равен сумме остатков (взятой по модулю 4). Сумма трёх чисел, каждое из которых 0 или 1, может быть: 0, 1, 2 или 3 — в зависимости от того, сколько среди них единиц.

Стоп — получается, остаток 3 возможен (если все три квадрата дают остаток 1)! Например, $1^2+1^2+1^2 = 3$, и правда даёт остаток 3 при делении на 4. Так что сумма трёх квадратов остаток 3 давать **может**.

(А вот для двух квадратов остаток 3 невозможен: $0+0=0$, $0+1=1$, $1+1=2$ — тройки не выходит. Это и есть знаменитый трюк: сумма двух квадратов никогда не даёт остаток 3 по модулю 4.)

Ответ: для трёх квадратов — да, может (например, $1+1+1=3$). А вот сумма двух квадратов остаток 3 по модулю 4 дать не может.



Запомни главное

Когда задача про «может ли / делится ли» с большими числами — переходи к **остаткам**. Маленькие остатки заменяют огромные числа, а степени дают **циклы**.

- На 2, 5, 10 — смотри последнюю цифру; на 4 — две последние; на 3 и 9 — сумму цифр.
- Признаки 3 и 9 работают, потому что 9, 99, 999 ... делятся на 9 (и на 3).

- Остатки можно складывать и умножать, а потом снова брать остаток.
- Последняя цифра степени = остаток по модулю 10, и она повторяется циклом. Дели показатель на длину цикла и смотри на остаток.
- Квадраты по модулю 4 дают только 0 или 1 — мощный инструмент доказательства невозможности.



Домашнее задание

1. Не выполняя деления, определи, на какие из чисел 2, 3, 4, 5, 9, 10 делится число 7380.
2. Подбери все цифры, которые можно поставить вместо звёздочки в числе $4*6$, чтобы оно делилось на 3.
3. Число записано ста единицами подряд: $111\dots 1$ (сто единиц). Делится ли оно на 3? А на 9?
4. Какой цифрой оканчивается число $3^{2^{025}}$?
5. Найди остаток от деления $5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{10}$ на 4. (Подсказка: какой остаток даёт каждая степень пятёрки при делении на 4?)
6. Докажи, что среди любых трёх подряд идущих натуральных чисел ровно одно делится на 3.
7. Докажи, что любое число, записанное цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (каждая по одному разу, в любом порядке), делится на 9. (Подсказка: посчитай сумму всех этих цифр.)
8. ★ Докажи, что число вида $11\dots 1$ (n единиц) никогда не является точным квадратом при $n \geq 2$. (Подсказка: посмотри на две последние цифры. Какой остаток такое число даёт при делении на 4? А какие остатки бывают у квадратов по модулю 4?)