

Урок 7. Игры и выигрышные стратегии

Математика · ~55 минут

Что ты узнаешь


- Что такое **выигрышная** и **проигрышная** позиция в игре.
- Как находить стратегию, рассуждая **с конца** игры.
- Победную стратегию в игре «отнимание камней» (секрет кратных 4).
- Стратегию **симметрии** — простой и красивый способ всегда выигрывать.

Разбираемся в теме

Представь: ты играешь с приятелем в простую игру с кучкой камней. Он каждый раз выигрывает. Каждый. Раз. Ты уже подозреваешь, что он жульничает. А он просто знает один секрет. И к концу урока этот секрет будешь знать ты — и сможешь обыграть кого угодно, даже не вспотев.

Мы поговорим про игры двух игроков, где:

- ходят **по очереди**;
- никто ничего не прячет — оба видят всю позицию (как в шахматах, а не в картах);
- нет случайностей (никаких кубиков);
- игра обязательно когда-нибудь кончается.

 **А знаешь ли ты?** В любой такой игре есть удивительный факт: **у одного из игроков всегда есть выигрышная стратегия**. То есть он может играть так, что выиграет при любой игре соперника — хоть тот лоб расшибёт. Наша задача — найти, у кого она есть и как ему ходить.

Введём два важных слова.

- **Проигрышная позиция (П-позиция)** — это позиция, в которой оказался тот, чей сейчас ход, и при правильной игре соперника он проиграет. Грубо: «кому досталась эта позиция — тот горюет».
- **Выигрышная позиция (В-позиция)** — позиция, из которой тот, чей ход, может выиграть при правильной игре.

Как их различить? Есть золотое правило, и оно работает через **анализ с конца**:

1. Позиция, где игра уже кончилась и **ходить нельзя**, — это проигрыш для того, кто должен был ходить (в игре «кто взял последний — выиграл» пустая куча означает, что предыдущий игрок забрал последнее и победил, а тебе ходить нечем → ты проиграл).
2. Позиция **выигрышная**, если из неё есть хотя бы **один** ход в проигрышную позицию (отдай сопернику плохую позицию — и он попал).
3. Позиция **проигрышная**, если **все** ходы из неё ведут только в выигрышные позиции (куда ни пойдёшь — подаришь сопернику победу).

Смотри, как красиво: «выигрышная = есть ход в проигрышную», «проигрышная = все ходы в выигрышные». Если идти от конца игры назад, можно пометить каждую позицию буквой В или П. А дальше стратегия очевидна: **всегда ходи так, чтобы отдать сопернику проигрышную позицию.**

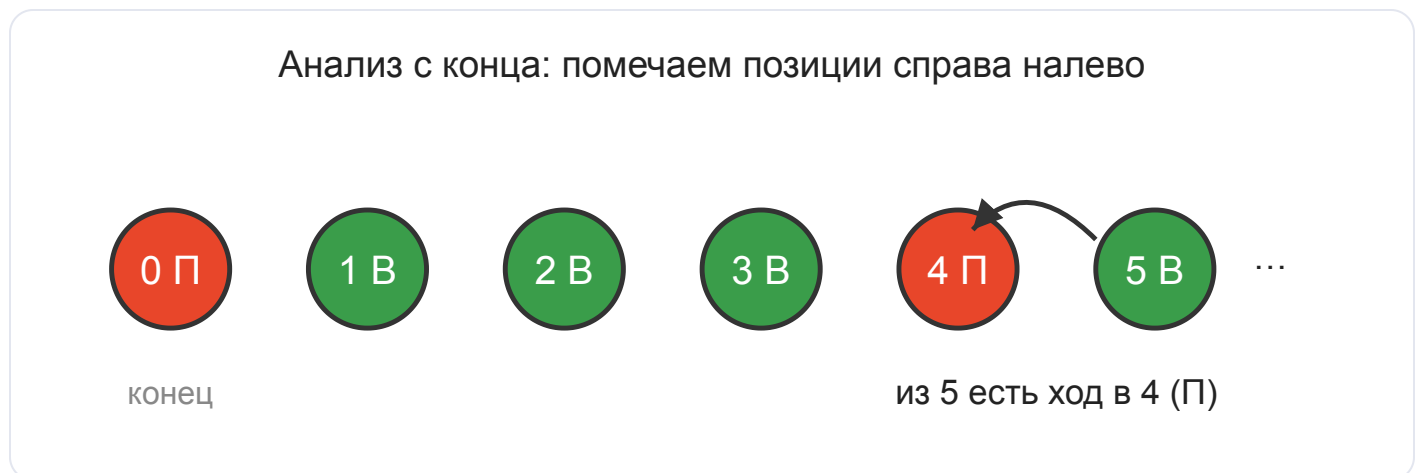




Рис. 1. Игра «бери 1–3 камня, последний выиграл». Красные — проигрышные (П) позиции, зелёные — выигрышные (В). П-позиции стоят на кратных 4.

Это и есть **анализ с конца** — мы начинаем разбор не с начала игры, а с её финала, где всё ясно, и пятимся назад.

 **Лайфхак:** Не пытайся продумать игру вперёд — там слишком много веток. Начинай с финала, где всё очевидно, и иди назад. Это как разгадывать лабиринт, выйдя из выхода.

Разбор примеров


Пример 1. В куче 20 камней. Двое по очереди берут 1, 2 или 3 камня. Кто взял **последний** камень — победил. Кто выиграет при правильной игре и как?

 Попробуй сам прикинуть на маленьких кучках (1, 2, 3, 4 камня), кто выигрывает, а потом читай дальше.

Как рассуждаем. Анализ с конца. Позиция = сколько камней осталось.

- 0 камней: тебе ходить нечем, значит соперник взял последний → ты проиграл. **0 — П.**
- 1, 2, 3 камня: можешь забрать все и выиграть → **В.**
- 4 камня: сколько ни возьми (1, 2 или 3), сопернику останется 3, 2 или 1 — а это всё В-позиции (он заберёт всё). Значит из 4 все ходы ведут в В → **4 — П.**
- 5, 6, 7: можно одним ходом оставить сопернику 4 (П-позицию) → **В.**
- 8: что ни возьми, останется 7, 6 или 5 — это В → **8 — П.**

Видишь закономерность? **Проигрышные позиции** — это кратные 4 (0, 4, 8, 12, 16, 20). В начале 20 камней — это П-позиция! Значит первому игроку досталась плохая позиция, и побеждает **второй**. Его стратегия: всякий раз дополнять ход первого до 4. Первый взял k камней — второй берёт $4-k$. После каждой такой пары ходов остаток уменьшается ровно на 4, оставаясь кратным 4: $20 \rightarrow 16 \rightarrow 12 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 0$. Последние 4 камня заберёт пара ходов, и последний камень окажется у второго.

 **Запомни:** Вот он, секрет из начала урока! «Бери 1–3, последний выиграл» → держи кучу кратной 4 после своего хода. Если в начале число кратно 4 — везёт второму, иначе первому.

Ответ: выигрывает второй игрок; стратегия — всегда дополнять ход соперника до 4.

Пример 2. Та же игра (куча 20, берут 1–3), но теперь правило **наоборот**: кто взял **последний** камень — **проиграл**. Кто выигрывает?

Как рассуждаем. Снова с конца, но финал поменялся. Теперь брать последний камень плохо. Удобно думать про «отравленный» последний камень: ты хочешь оставить сопернику ровно 1 камень, чтобы он был вынужден его взять.

- 1 камень: ты обязан взять его (брать можно 1–3, но камень один) и проигрываешь → **1 — П.**
- 2, 3, 4 камня: можешь оставить сопернику ровно 1 → **В.**
- 5 камней: что ни возьми (1–3), останется 4, 3 или 2 — это В → **5 — П.**
- Дальше закономерность: проигрышные позиции — те, где остаток даёт **остаток 1 при делении на 4** (1, 5, 9, 13, 17, 21, ...).

В начале 20 камней. $20 = 4 \cdot 5$, остаток при делении на 4 равен 0 — это **не** проигрышная позиция, значит 20 — В. Ходит первый и побеждает. Его первый ход: оставить сопернику число вида «кратное 4 плюс 1». Ближайшее снизу — 17. Значит первый берёт $20 - 17 = 3$ камня. Дальше он дополняет ходы соперника до 4, держа остаток в ряду 17, 13, 9, 5, 1. В конце сопернику достанется 1 камень, и он вынужден взять последний — проигрывает.

Ответ: выигрывает первый; первым ходом берёт 3 (оставляет 17), затем дополняет ходы соперника до 4.

Пример 3. Двое по очереди называют числа. Начинают с 0, и каждый прибавляет к текущей сумме число от 1 до 10. Кто первым назовёт сумму **100** — выиграл. У кого выигрышная стратегия?

Как рассуждаем. Это «отнимание наоборот»: вместо убывающей кучи у нас растущая сумма до 100. Думаем с конца. Назвать 100 — победа. Значит ты хочешь сам произнести 100. Какие суммы хочется «подарить» сопернику, чтобы он не мог достать до 100, но и не мешал тебе?

Если перед твоим ходом сумма равна 89, то ты прибавляешь $\$100 - 89 = 11\$$ — но максимум 10! Не дотянешь. Зато если ты **оставил** сопернику сумму 89, то он прибавит от 1 до 10 и получит от 90 до 99, а ты следующим ходом доберёшь до 100. Значит 89 — позиция, которую хочется подарить сопернику.

А до 89 — аналогично 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1. Это ключевые числа: они идут с шагом 11. Тот, кто называет эти числа, побеждает. Самое первое ключевое число — **1**. Его может назвать первый игрок (прибавив 1 к нулю).

Ответ: выигрывает первый. Он называет 1, а затем после каждого хода соперника дополняет сумму так, чтобы получилось следующее ключевое число (то есть прибавляет до $\$1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100\$$). Если соперник прибавил $k\$$, первый прибавляет $\$11-k\$$.

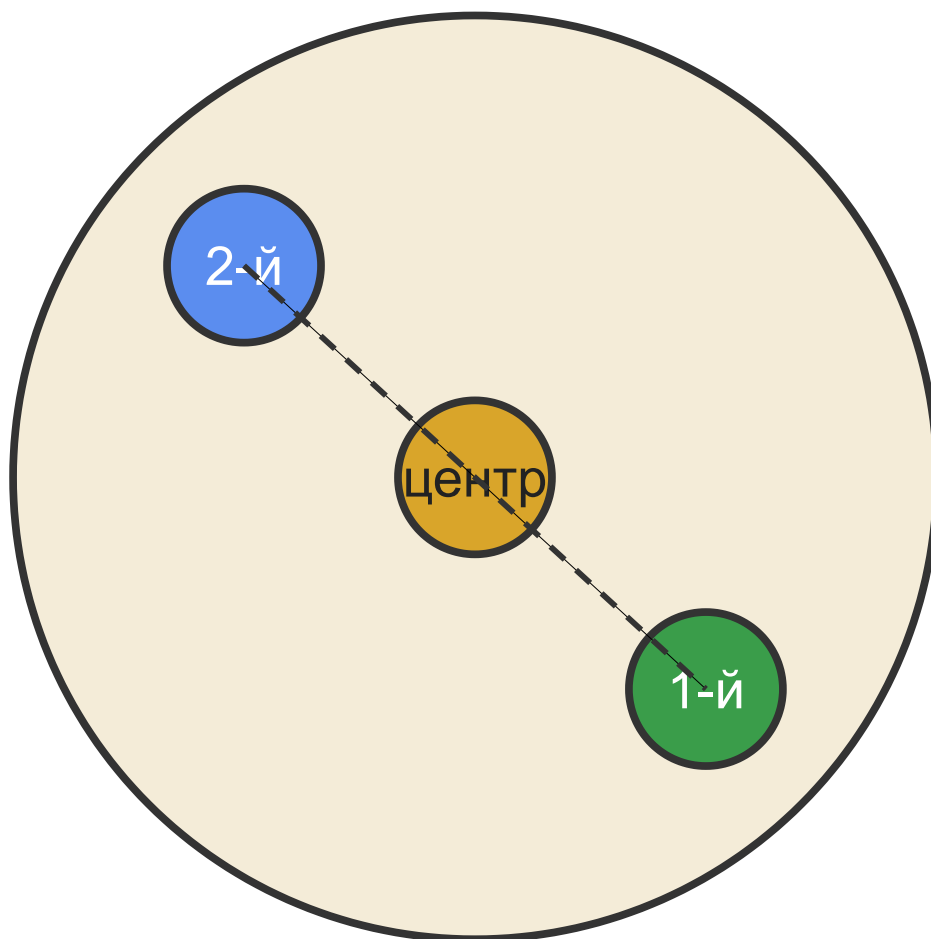
Пример 4. Двое кладут одинаковые круглые монеты на круглый стол. Монеты не должны налегать друг на друга и не должны свешиваться со стола. Ходят по очереди; кто не может положить монету — проиграл. Кто выигрывает?

🕒 Попробуй сам. Подсказка: у круглого стола есть одна особенная точка. Куда бы ты сходил первым?

Как рассуждаем. Здесь спасает **стратегия симметрии** — пожалуй, самая красивая идея во всём уроке. У круглого стола есть центр. Первым ходом первый игрок кладёт монету **точно в центр** стола. После этого стол стал симметричным относительно центра, и в центре уже занято.

Дальше первый играет «зеркально»: куда бы второй ни положил монету, первый кладёт свою в **центрально-симметричную точку** (по другую сторону от центра, на том же расстоянии). Почему это всегда возможно? Если второй смог положить монету в какое-то место, то симметричное место тоже свободно: оно было бы занято только симметричной монетой, но все монеты до этого

ставились парами-зеркалами, плюс центральная (она симметрична сама себе и занята). Значит у первого всегда есть ответный ход. Игра конечна (стол не бесконечный), поэтому рано или поздно второму некуда будет ходить.



Ответ 1-го — зеркало хода 2-го через центр

Рис. 2. Стратегия симметрии: первый ходит в центр, затем отвечает в точку, симметричную ходу соперника.


Ответ: выигрывает первый: первый ход — в центр, далее симметрично ответам соперника.

Пример 5. На прямоугольном столе двое по очереди кладут спички (одинаковые), спичка не должна налегать на уже лежащие и не должна свисать. Кто не может положить — проиграл. Есть ли тут симметрия? Кто выигрывает?

Как рассуждаем. У прямоугольника тоже есть центр симметрии. Но спичка — не круг, у неё есть направление! Чтобы симметрия работала, при центральной симметрии спичка должна переходить в «правильно лежащую» спичку. Если первый игрок кладёт первую спичку точно по центру стола **вдоль одной из осей симметрии** (например, параллельно длинной стороне, по центральной линии), то центральное место занято, и дальше он отвечает центрально-симметрично. При центральной симметрии спичка переходит в спичку того же направления — значит ответ всегда корректен и возможен.


Ответ: выигрывает первый — первая спичка в центр вдоль оси, далее симметрично.

Пример 6. Шоколадка 6×4 (24 дольки). За ход берут один кусок и ломают его по прямой линии (вдоль углубления) на два куска. Игра идёт, пока вся шоколадка не разломана на 24 отдельные дольки. Кто сделал **последний** разлом — победил. Кто выигрывает?

 Попробуй сам. Тут есть подвох: посчитай, сколько вообще разломов придётся сделать. От чего это число зависит?

Как рассуждаем. Сначала кажется, что нужна сложная стратегия. Но найдём **инвариант** (привет уроку 6!). Каждый разлом берёт один кусок и делает из него **два**, то есть число кусков увеличивается ровно на 1. В начале кусок один. В конце кусков 24. Значит всего сделано $\$24 - 1 = 23\$$ разлома — **независимо от того, как ломали!** Число ходов фиксировано: 23. Ходы делают по очереди: 1-й, 2-й, 1-й, ... Ход номер 23 — нечётный, значит его делает **первый** игрок (он делает ходы 1, 3, 5, ..., 23).

Ответ: выигрывает первый — он всегда делает последний (23-й) разлом, как бы оба ни играли. Стратегия не нужна вовсе: исход предрешён числом кусков.

 **Запомни:** Иногда играть умно вообще не надо. Если число ходов **фиксировано**, победитель определяется одной только чётностью этого числа. Всегда сначала проверяй: а не предрешён ли исход заранее?

Заметь разницу: в примерах 1–3 нужно умно ходить, а в примере 6 побеждает «автоматически» тот, кому повезло с чётностью числа ходов.



Запомни главное

- В честной игре двух игроков у кого-то всегда есть выигрышная стратегия.
- **Анализ с конца:** финал ясен, помечай позиции В/П, пячься назад.
- **П-позиция:** все ходы ведут в В. **В-позиция:** есть ход в П.
- Стратегия: всегда отдавай сопернику **проигрышную** позицию.
- «Бери 1–3, последний выиграл» → проигрышные позиции кратны 4; дополняй ход соперника до 4.
- **Симметрия:** сходи в центр, потом зеркаль ходы соперника. Работает, когда у поля есть центр симметрии.
- Если **число ходов фиксировано** (как при ломании шоколадки) — победитель определяется только чётностью числа ходов.



Домашнее задание

1. Куча 12 камней, берут 1, 2 или 3, кто взял последний — выиграл. Кто победит и как?
2. Куча 21 камень, берут 1, 2 или 3, кто взял последний — выиграл. Кто победит и какой первый ход?
3. Куча 15 камней, берут 1, 2, 3 или 4, кто взял последний — **проиграл**. Кто победит и как ходить? (Подумай, какие остатки при делении на 5 — проигрышные.)
4. Двое прибавляют к сумме 1, 2 или 3, начиная с 0. Кто назовёт 24 — победил. У кого стратегия?

5. Шоколадка 5×7 (35 долек), ломают как в примере 6, последний разлом — победа. Кто выигрывает? (Сначала посчитай число ходов.)
6. Двое кладут монеты на круглый стол (как в примере 4), но первый игрок **по ошибке** сделал первый ход не в центр. Может ли теперь второй перехватить выигрышную стратегию? Объясни идею.
7. Куча 100 камней, берут 1, 2, 3, 4 или 5; кто взял последний — выиграл. Кто победит и какова стратегия?
8. ☆ На доске 7×7 двое по очереди ставят королей так, чтобы новый король не стоял на клетке, **соседней** (по стороне или диагонали) с уже стоящим королём. Кто не может поставить — проиграл. У кого выигрышная стратегия? (Подсказка: у доски 7×7 есть настоящая центральная клетка — вспомни стратегию симметрии.)