

Урок 8. Геометрия: углы, площади, разрезания

Математика · ~55 минут

Что ты узнаешь

- Что такое смежные и вертикальные углы и как их находить.
- Почему сумма углов треугольника равна 180° , а у многоугольника считается по формуле.
- Как находить площади фигур на клетчатой бумаге и разрезать фигуры на равные части.
- Волшебную **формулу Пика** для площади по точкам решётки.

Разбираемся в теме

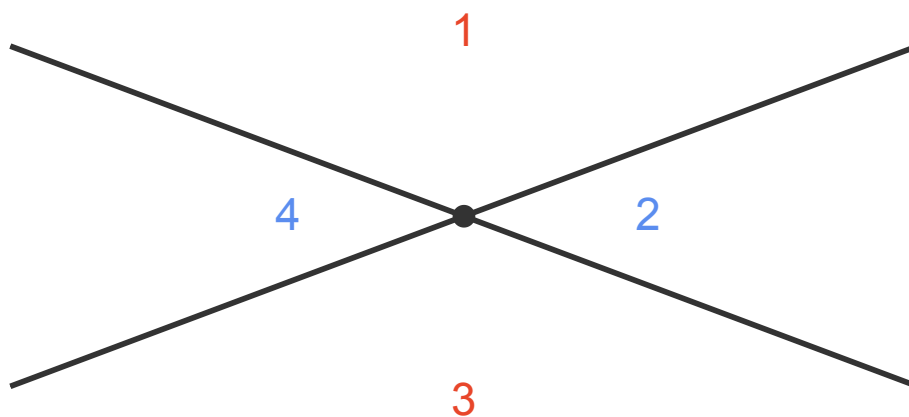
Вырежи из бумаги любой треугольник — кривой, косой, какой угодно. Оторви три уголка и приложи их вершинами в одну точку. Что получится? Они сложатся в идеально ровную прямую линию — развёрнутый угол, 180° . Всегда. Хоть с тысячей разных треугольников. Сегодня ты поймёшь, почему так происходит, и научишься измерять фигуры, просто считая точки. Поехали.

Углы

Угол — это «раствор» между двумя лучами, выходящими из одной точки. Меряем в градусах. Полный оборот — 360° , половина оборота (развёрнутый угол, прямая) — 180° , четверть (прямой угол) — 90° .

Смежные углы. Если два угла вместе составляют прямую (лежат рядом и их внешние стороны образуют развёрнутый угол), то их сумма равна **180°** . Один угол 40° — смежный с ним 140° . Это очень частый приём: «достроить до 180° ».

Вертикальные углы. Когда две прямые пересекаются, получаются четыре угла. Те, что лежат «напротив друг друга» (не рядом, а через точку пересечения), называются вертикальными, и они **равны**. Почему? Каждый из них смежный с одним и тем же третьим углом. Если $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ и $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$, то $\angle 1 = \angle 3$.

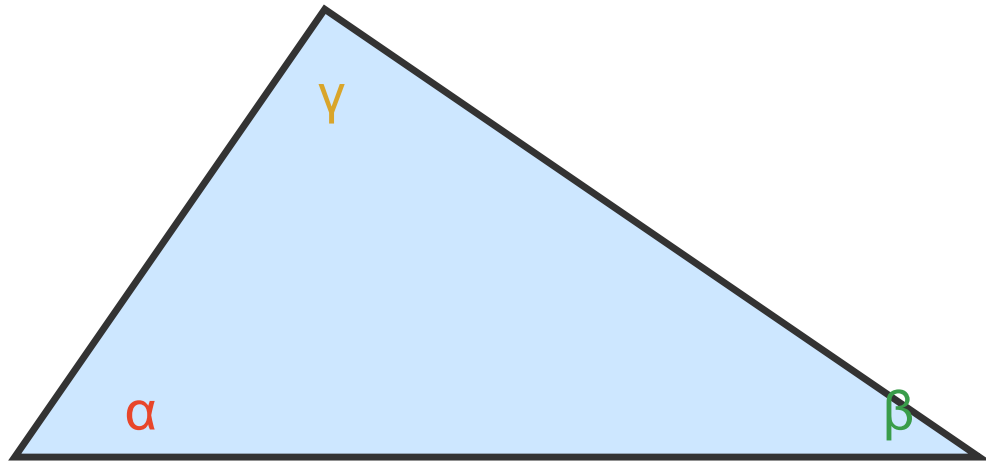


Вертикальные равны: $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$. Смежные: $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

Рис. 1. Две пересекающиеся прямые. Углы напротив (одного цвета) равны; соседние дают в сумме 180° .

Сумма углов треугольника

Сумма углов любого треугольника равна 180° . Это один из самых важных фактов геометрии (и тот самый фокус с оторванными уголками из начала урока). Простое объяснение: представь, что ты идёшь по сторонам треугольника и в каждой вершине поворачиваешь. Обойдя весь треугольник и вернувшись, ты повернёшься в сумме на полный оборот — 360° . В каждой вершине ты поворачиваешь на «внешний угол» (это 180° минус внутренний угол). Сумма трёх внешних углов = 360° , значит сумма трёх « 180° минус внутренний» = 360° , то есть $3 \cdot 180^\circ - (\text{сумма внутренних}) = 360^\circ$, откуда сумма внутренних $= 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$.

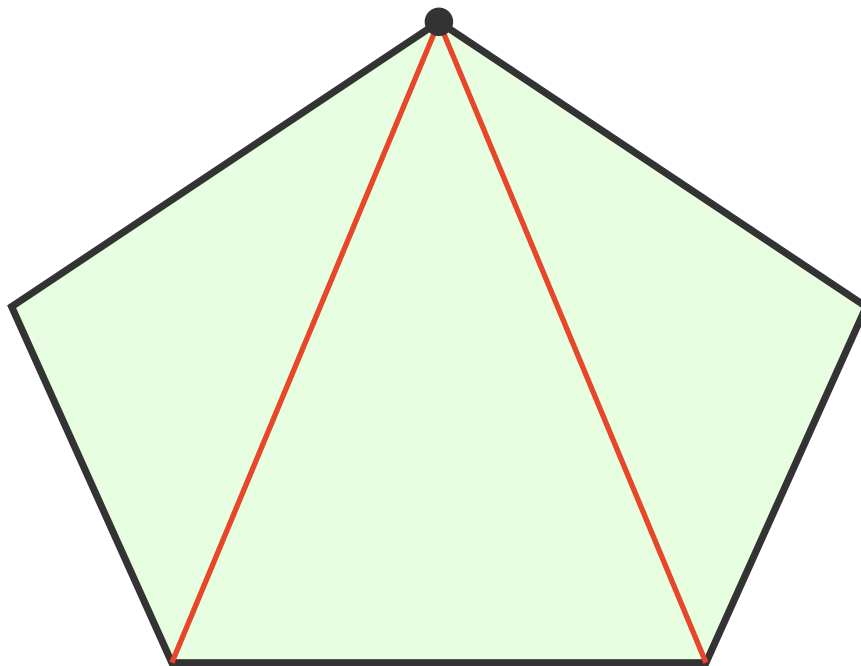


$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Рис. 2. Сумма трёх углов любого треугольника всегда равна 180° .


Сумма углов многоугольника

У выпуклого n -угольника сумму углов считают так: разрежем его на треугольники из одной вершины. Из одной вершины можно провести диагонали и разбить n -угольник ровно на $(n-2)$ треугольника. В каждом — 180° . Значит: $\text{сумма углов } n\text{-угольника} = (n-2) \cdot 180^\circ$. Проверим: треугольник $n=3$: $(3-2) \cdot 180^\circ = 180^\circ$. Четырёхугольник $n=4$: $(4-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Пятиугольник $n=5$: 540° . Шестиугольник: 720° .



5 сторон \rightarrow 3 треугольника $\rightarrow 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$

Рис. 3. Пятиугольник делится диагоналями из одной вершины на $(n-2)=3$ треугольника.

 **Лайфхак:** Не запоминай отдельно сумму углов для четырёх-, пяти-, шестиугольника. Запомни одну формулу $(n-2) \cdot 180^\circ$ — и любой случай посчитаешь за секунду.

Площади на клетчатой бумаге

Площадь — это «сколько единичных квадратиков помещается в фигуру». Прямоугольник $a \times b$ имеет площадь $a \cdot b$. Площадь прямоугольного треугольника — половина прямоугольника. Сложные фигуры можно резать на простые и складывать площади, или, наоборот, достраивать до прямоугольника и вычитать лишнее.

Формула Пика

Это настоящая жемчужина. Если у фигуры (многоугольника) **все вершины — в узлах клетчатой бумаги** (в точках, где пересекаются линии), то её площадь

можно найти, просто посчитав точки: $S = B + \frac{\Gamma}{2} - 1$, где **B** — число узлов **внутри** фигуры, **Г** — число узлов **на границе** (на сторонах и в вершинах). Удивительно: не нужно ничего измерять, только считать точки!

🤔 **А знаешь ли ты?** Эту формулу придумал австрийский математик Георг Пик в 1899 году. Она работает для любого, даже самого кривого многоугольника с вершинами в узлах — хоть в виде дракона. Никаких линеек, только счёт точек.

👉 Разбор примеров

Пример 1. Две прямые пересеклись. Один из четырёх углов равен 35° . Найди остальные три.

Как рассуждаем. Угол, **смежный** с данным, дополняет до 180° : $180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$. Угол, **вертикальный** данному (напротив), равен ему: 35° . Четвёртый угол вертикален углу 145° , значит тоже 145° .

Ответ: $35^\circ, 145^\circ, 35^\circ, 145^\circ$.

Пример 2. В треугольнике два угла равны 50° и 70° . Найди третий угол.

Как рассуждаем. Сумма углов треугольника 180° . Третий $= 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

Пример 3. Чему равна сумма углов семиугольника? А чему равен один угол **правильного** семиугольника (где все углы равны)?

Как рассуждаем. Сумма $= (n-2) \cdot 180^\circ = (7-2) \cdot 180^\circ = 5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$. Если все 7 углов равны, каждый $= 900^\circ / 7 \approx 128{,}57^\circ$.

Ответ: сумма 900° ; один угол правильного семиугольника $\approx 128{,}57^\circ$.

Пример 4. Найди площадь треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги: $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,3)$. (Сторона клетки = 1.)

🕒 Попробуй сам — двумя способами: как половину прямоугольника и по формуле Пика. Совпадёт?

Как рассуждаем. Это прямоугольный треугольник: катеты лежат по осям, длины 4 и 3. Площадь прямоугольного треугольника = половина произведения катетов: $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

Проверим формулой Пика. Узлы на границе: по нижнему катету от $(0,0)$ до $(4,0)$ узлы $(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0)$ — 5 штук; по левому катету добавляются $(0,1), (0,2), (0,3)$ — 3 новых (точку $(0,0)$ уже сосчитали); на гипотенузе от $(4,0)$ до $(0,3)$ промежуточных узлов нет, потому что разности координат 4 и 3 взаимно просты (концы уже учтены). Итого $\Gamma = 5 + 3 = 8$. Внутренних узлов ровно три: это $(1,1)$, $(1,2)$ и $(2,1)$ — отметь их на чертеже, остальные узлы либо на границе, либо снаружи. Значит $B = 3$. Тогда $S = B + \frac{\Gamma}{2} - 1 = 3 + \frac{8}{2} - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. Совпало!

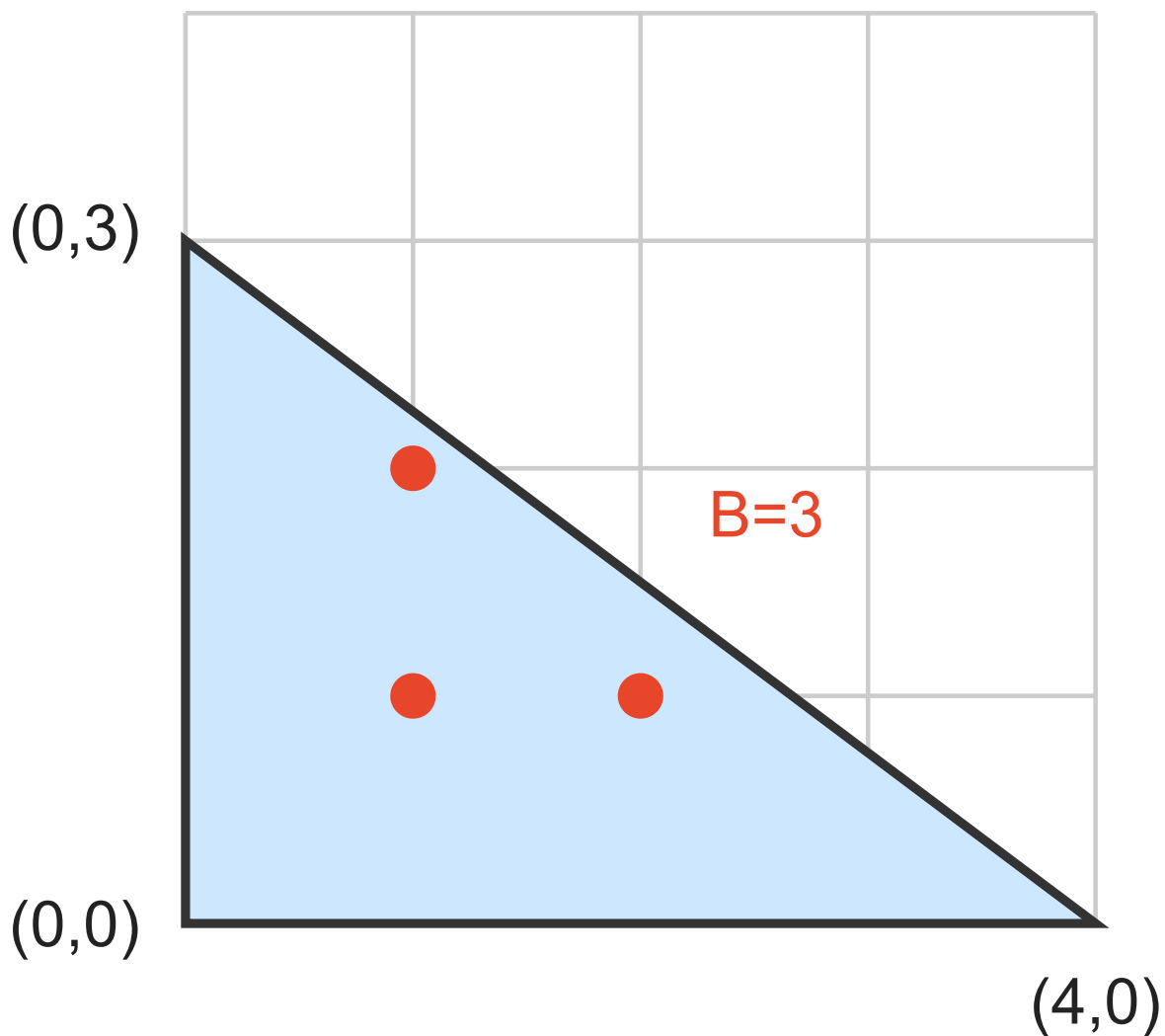


Рис. 4. Треугольник на решётке. Внутри 3 узла (красные), на границе 8. По Пикау: $S = 3 + 8/2 - 1 = 6$.

Ответ: 6.

Пример 5. На клетчатой бумаге нарисован «флажок» — многоугольник с вершинами в узлах. Внутри него 11 узлов, на границе 8 узлов. Найди площадь.

Как рассуждаем. Прямо применяем формулу Пика: $B = 11$, $\Gamma = 8$. $S = B + \frac{\Gamma}{2} - 1 = 11 + \frac{8}{2} - 1 = 11 + 4 - 1 = 14$.


Ответ: 14.

Пример 6. Квадрат 4×4 (на клетчатой бумаге) разрежь на 4 одинаковые по форме и размеру части. Сколькими принципиально разными способами это можно сделать? Покажи хотя бы три.

Как рассуждаем. Площадь квадрата 16 , значит каждая часть имеет площадь $16/4 = 4$ клетки. Способы:

1. Четыре горизонтальные полосы 4×1 .
2. Четыре вертикальные полосы 1×4 .
3. Четыре квадрата 2×2 (разрезать пополам и ещё раз пополам).
4. Четыре «уголка»/Г-образные фигурки из 4 клеток — можно сложить их «вертушкой» вокруг центра (поворотная симметрия на 90°).
5. Четыре прямоугольника 2×2 другой ориентации, или ступенчатые фигуры — главное, чтобы все 4 были одинаковы и заполняли квадрат.

Главная идея проверки: площадь каждой части = 4, и 4 части без дырок и наложений покрывают квадрат.

 **Запомни:** При разрезании на k равных частей первым делом проверь: площадь каждой части обязана быть $\frac{S}{k}$. Если не делится нацело — задача уже невозможна.

Ответ: способов много; не меньше четырёх принципиально разных (полосы горизонтальные, полосы вертикальные, квадратики 2×2 , «вертушка» из уголков).



Запомни главное

- Смежные углы дают в сумме 180° ; вертикальные углы **равны**.
- Сумма углов треугольника всегда 180° .
- Сумма углов n -угольника $= (n-2) \cdot 180^\circ$. Один угол правильного n -угольника $= \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.
- Площадь на клетке: режь на простые части или достраивай до прямоугольника.

- **Формула Пика:** $S = B + \frac{\Gamma}{2} - 1$ (B — узлы внутри, Γ — узлы на границе). Работает, только если все вершины в узлах.
- При разрезании на k равных частей площадь каждой $= \frac{S}{k}$ — это первая проверка.



Домашнее задание

1. Две прямые пересеклись, один угол равен 118° . Найди остальные три.
2. В треугольнике углы относятся как $1:2:3$. Найди все три угла. (Подсказка: пусть углы $x, 2x, 3x$, их сумма 180° .)
3. Чему равна сумма углов десятиугольника? Чему равен один угол правильного десятиугольника?
4. Существует ли треугольник с углами $90^\circ, 60^\circ$ и 40° ? Объясни.
5. Найди площадь треугольника с вершинами в узлах $(0,0)$, $(5,0)$, $(2,4)$ по формуле Пика и проверь её через «половину основания на высоту».
6. Многоугольник на клетчатой бумаге имеет внутри 6 узлов, а на границе 10 узлов. Найди его площадь.
7. Разрежь квадрат 6×6 на 4 одинаковые части тремя разными способами (опиши словами или нарисуй).
8. ★ Сумма углов некоторого выпуклого многоугольника равна 1440° . Сколько у него сторон? А может ли сумма углов выпуклого многоугольника быть равной 1000° ? Объясни.