

Урок 9. Процессы: переливания, взвешивания, переправы

Математика · ~55 минут

Что ты узнаешь

- Как решать задачи на **переливания** (отмерить 4 литра кувшинами 3 и 5 литров).
- Как искать фальшивую монету на **чашечных весах** за наименьшее число взвешиваний.
- Как переправлять волка, козу и капусту через реку, не устроив беды.
- Главную идею всех таких задач: думать про **состояния** и переходы между ними.

Разбираемся в теме

Ты наверняка видел такое в кино: герой стоит перед бомбой, рядом два ведра — на 3 литра и на 5 литров, и нужно отмерить ровно 4 литра, иначе всё взорвётся. Звучит как магия? На самом деле это обычная школьная задача, и сегодня ты будешь щёлкать такие как орешки. А заодно научишься ловить фальшивые монеты и перевозить через реку волка, козу и капусту — да так, чтобы все остались целы.

Все эти задачи объединяет одна мысль. В каждый момент система находится в каком-то **состоянии** — наборе фактов: «сколько воды в каждом кувшине», «кто на каком берегу», «какие монеты на левой и правой чаше». Разрешённые действия переводят одно состояние в другое. Решить задачу — значит найти **цепочку состояний** от начального к нужному, делая только разрешённые шаги.

💡 **Лайфхак:** Любую такую задачу представляй как лабиринт: состояния — это комнаты, разрешённые действия — двери между ними. Иногда удобнее идти от начала, а иногда — **от цели назад** (вспомни анализ с конца из урока про игры).

Переливания

Есть несколько сосудов без делений; мы умеем только: наполнить сосуд доверху из источника, вылить сосуд полностью, или перелить из одного в другой (пока первый не опустеет или второй не наполнится). Состояние — сколько литров в каждом сосуде. Цель — получить нужный объём.

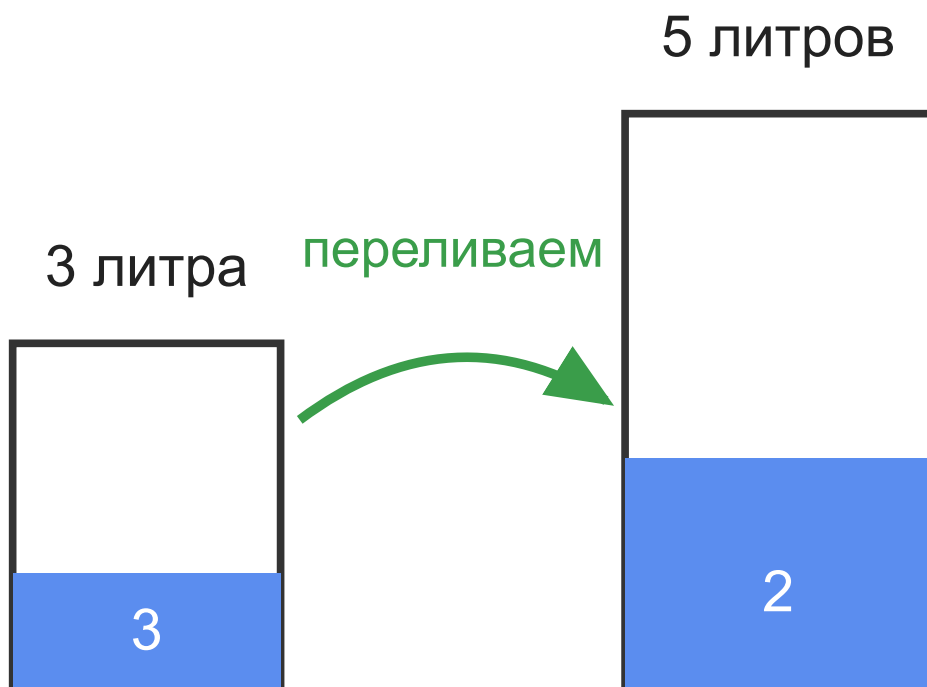
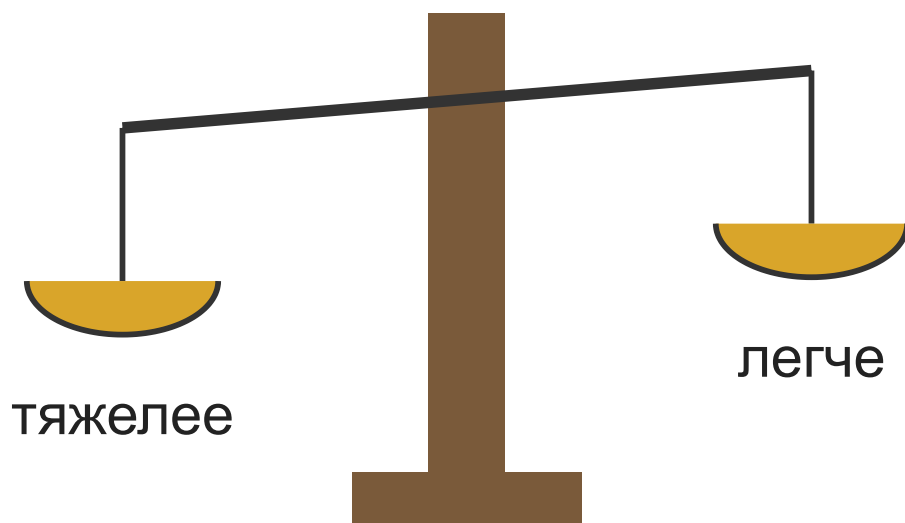


Рис. 1. Два сосуда без делений. Состояние — пара чисел «сколько в каждом».

Взвешивания

Чашечные весы не показывают вес — они лишь говорят, какая чаша **тяжелее**, или что **равновесие**. Каждое взвешивание имеет **три** возможных исхода: левая тяжелее, правая тяжелее, равно. Поэтому одно взвешивание может различить максимум 3 случая, два взвешивания — $3 \times 3 = 9$ случаев, три — 27 . Это ключ к тому, чтобы понять, сколько взвешиваний нужно.



3 исхода: левая / правая / равно

Рис. 2. Чашечные весы дают три исхода. Значит k взвешиваний различают до 3^k случаев.

Переpravы

Лодка вмещает ограниченное число «пассажиров», а некоторых нельзя оставлять вместе без присмотра. Состояние — кто на каком берегу (и где лодка). Нужно перевезти всех, ни разу не попав в «запрещённое» состояние.



Разбор примеров

Пример 1. Есть два кувшина: на 3 литра и на 5 литров, без делений. Рядом кран с водой и раковина (можно выливать). Как отмерить ровно 4 литра?

🕒 Попробуй сам, прежде чем читать. Записывай состояние парой (в 3-литровом; в 5-литровом) и ходи: налить / вылить / перелить.

Как рассуждаем. Будем записывать состояние парой (в кувшине 3 л; в кувшине 5 л). Начинаем с (0; 0). Цель — чтобы где-то оказалось 4 литра.

1. Наполним 5-литровый доверху: (0; 5).
2. Перельём из 5-литрового в 3-литровый, пока тот не наполнится. В 3-литровый влезет 3 л, значит из 5-литрового уйдёт 3, останется 2: (3; 2).
3. Выльем 3-литровый: (0; 2).
4. Перельём оставшиеся 2 литра из большого в маленький: (2; 0).
5. Снова наполним 5-литровый доверху: (2; 5).
6. Дольём из 5-литрового в 3-литровый до краёв. В 3-литровом уже 2 литра, влезет ещё 1. Значит из 5-литрового уйдёт 1 литр, останется $5 - 1 = 4$: (3; 4).

В 5-литровом кувшине ровно 4 литра! Вот и обезврежена «бомба» из начала урока.

Ответ: 4 литра отмеряются за 6 шагов по схеме выше.

Пример 2. Те же кувшины 3 и 5 литров. Можно ли отмерить 4 литра **другим** путём — сначала используя маленький кувшин?

Как рассуждаем. Да, есть «зеркальный» путь. Состояние (3 л; 5 л).

1. Наполним 3-литровый: (3; 0).
2. Перельём всё в 5-литровый: (0; 3).
3. Снова наполним 3-литровый: (3; 3).
4. Доольём в 5-литровый до краёв: в нём было 3, влезет ещё 2, значит из маленького уйдёт 2, останется 1: (1; 5).
5. Выльем 5-литровый: (1; 0).
6. Перельём 1 литр в большой: (0; 1).
7. Наполним маленький: (3; 1).
8. Перельём всё в большой: $\$1 + 3 = 4\$$: (0; 4).

Ответ: да; получаем 4 литра в большом кувшине, но дольше — за 8 шагов. Первый путь короче.



А знаешь ли ты? К одной цели почти всегда ведут разные пути — как в лабиринте. Один короче, другой длиннее. Правильных ответов может быть несколько; математики любят искать самый короткий.

Пример 3. Есть 8 литров воды в большом бидоне и два пустых кувшина — на 3 и на 5 литров. Воду доливать неоткуда (8 литров — это всё). Как разделить воду **поровну**, чтобы получилось 4 и 4 литра?

Как рассуждаем. Теперь нет крана: вода только переливается между бидоном (8 л, но это «сосуд» с текущим содержимым), кувшином 5 и кувшином 3. Состояние — тройка (бидон; 5-литровый; 3-литровый), в сумме всегда 8. Старт (8; 0; 0). Цель — где-то 4 и 4 (например, бидон 4, пятилитровый 4, трёхлитровый 0).

1. Налъём из бидона в 5-литровый доверху: (3; 5; 0).
2. Из 5-литрового нальём в 3-литровый доверху: (3; 2; 3).
3. Выльем 3-литровый обратно в бидон: (6; 2; 0).
4. Перельём 2 литра из 5-литрового в 3-литровый: (6; 0; 2).
5. Налъём из бидона в 5-литровый доверху: (1; 5; 2).
6. Доольём из 5-литрового в 3-литровый до краёв (там 2, влезет 1): (1; 4; 3).

7. Выльем 3-литровый в бидон: (4; 4; 0).

Теперь в бидоне 4 литра и в 5-литровом кувшине 4 литра — поровну!

Ответ: да, делится поровну (4 и 4) по схеме выше.

Пример 4. Есть 9 монет, одинаковых на вид. Одна из них **фальшивая и тяжелее** остальных (настоящие весят одинаково). Дано чашечные весы без гирь. Как за **2 взвешивания** наверняка найти фальшивую?

🕒 Попробуй сам. Подсказка: у весов 3 исхода, значит и монеты дели на... сколько групп?

Как рассуждаем. Подсчитаем возможности: фальшивой может быть любая из 9 монет — 9 случаев. Два взвешивания дают $3 \times 3 = 9$ исходов — ровно столько, сколько нужно. Значит шанс есть, если делить монеты на **три** равные группы (под три исхода весов).

Разделим 9 монет на три группы по 3: А, В, С.

Взвешивание 1: на левую чашу группу А, на правую группу В.

- Если **равновесие** — фальшивая не в А и не в В, значит она в группе С.
- Если левая **тяжелее** — фальшивая (она тяжёлая) в группе А.
- Если правая тяжелее — фальшивая в группе В.

В любом случае мы знаем группу из **3 монет**, среди которых фальшивая. Обозначим эти три монеты x , y , z .

Взвешивание 2: кладём x на левую чашу, y на правую.

- Равновесие — фальшивая z .
- Левая тяжелее — фальшивая x .
- Правая тяжелее — фальшивая y .

📌 **Запомни:** На чашечных весах не дели монеты пополам! Дели на **три** группы — под три исхода весов. Тогда каждое взвешивание режет число

подозреваемых втрое, и это самый быстрый способ.

Ответ: двух взвешиваний достаточно; делим по 3, потом из тройки сравниваем две монеты.

Пример 5. Есть 8 монет, одна **легче** (фальшивая), остальные одинаковы. Найди её за 2 взвешивания.

Как рассуждаем. Возможностей 8, а два взвешивания различают до 9 — должно хватить. Но 8 на три равные группы не делится. Поступим хитро: разделим на группы 3, 3, 2.

Взвешивание 1: 3 монеты против 3 монет.

- Если **равновесие** — фальшивая среди оставшихся **2** монет (тех, что не взвешивали).
- Если одна чаша **легче** — фальшивая (она лёгкая) среди тех **3** монет, что на лёгкой чаше.

Случай «равновесие»: осталось 2 монеты, одна легче. **Взвешивание 2:** одна против другой — лёгкая чаша покажет фальшивую.

Случай «нашли тройку с фальшивой»: **взвешивание 2** — одну монету против другой из этой тройки. Равновесие → фальшивая третья; иначе лёгкая чаша указывает на фальшивую.

Ответ: 2 взвешиваний достаточно; делим 3-3-2.

Пример 6. Через реку нужно перевезти **волка, козу и капусту**. Лодка маленькая: за раз помещается только перевозчик и **один** «груз». Нельзя оставлять без присмотра волка с козой (волк съест козу) и козу с капустой (коза съест капусту). Волк и капуста друг другу безразличны. Как перевезти всех?

🕒 Попробуй сам. Подсказка: кто здесь самый «проблемный»? И не бойся возить кого-то обратно.

Как рассуждаем. Думаем про состояния: кто на исходном берегу. Опасные пары — (волк, коза) и (коза, капуста). Значит главный «нарушитель спокойствия» —

коза: её нельзя оставить ни с волком, ни с капустой. Ключевая идея: возить так, чтобы коза никогда не оставалась наедине с врагом. И не бояться **ВОЗИТЬ КОГО-ТО ОБРАТНО**.

1. Перевозчик берёт **козу** на тот берег (на исходном остались волк и капуста — они мирные). Возвращается один.
2. Берёт **волка** на тот берег. Но там уже коза — нельзя их оставить! Поэтому, высадив волка, забирает **козу обратно**. Теперь на том берегу волк, на этом — коза и капуста (перевозчик с ними).
3. Высаживает козу на исходном берегу, берёт **капусту** и везёт на тот берег. Там теперь волк и капуста — они мирные. Возвращается один.
4. Берёт **козу** и везёт на тот берег. Готово: все трое переправлены.

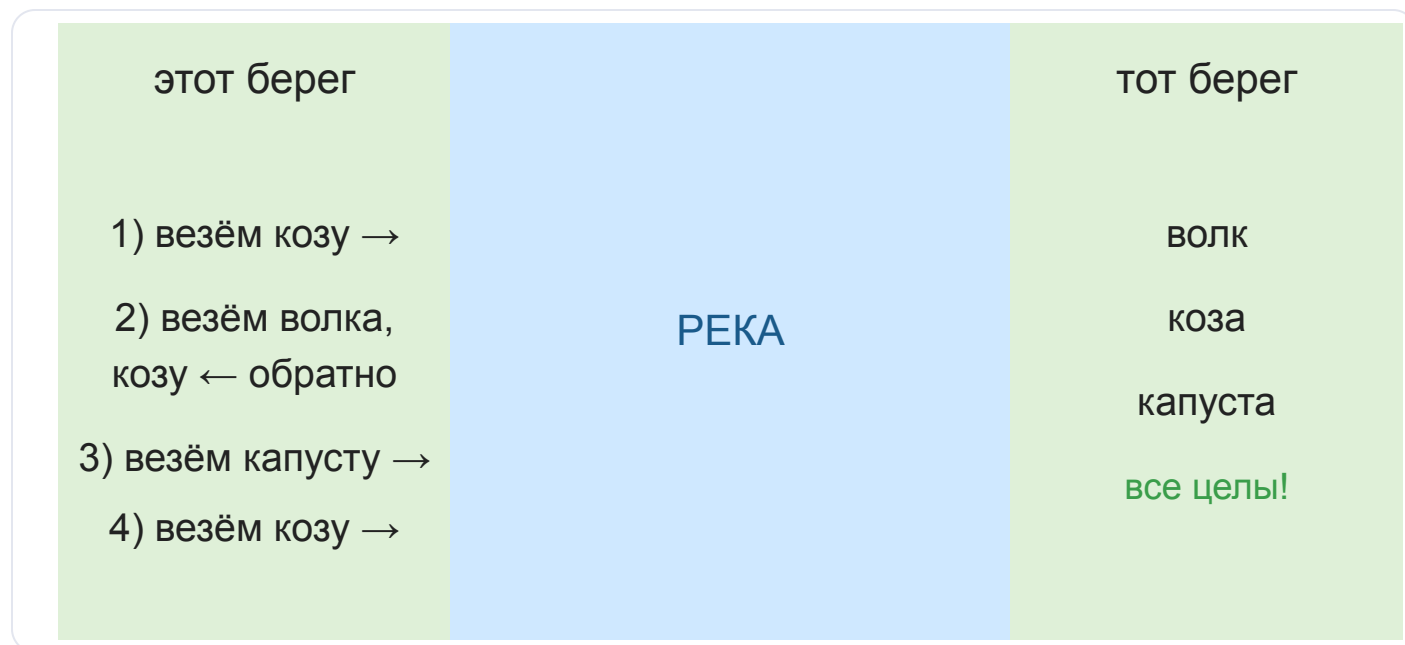


Рис. 3. Переправа: ключ — возить козу так, чтобы она не оставалась наедине с врагом, и однажды вернуть её обратно.

Проверим, что ни разу не было беды: коза оставалась без присмотра только тогда, когда враги (волк или капуста) были на другом берегу. Всё чисто.

Ответ: перевозим козу, возвращаемся; везём волка, козу забираем обратно; везём капусту, возвращаемся; везём козу. Всего 7 рейсов лодки.



Запомни главное

- Думай про **состояния** и переходы между ними; задача — найти путь от старта к цели.
- В переливаниях записывай состояние как набор чисел и делай шаги: налить доверху / вылить / перелить до края.
- Часто помогает идти **от цели назад** или возить «обратно» (как козу).
- На чашечных весах у каждого взвешивания **три** исхода: дели предметы на **три** группы.
- 3^k взвешиваний различают до 3^k случаев: $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 9, 3 \rightarrow 27$.
- В переправах найди «нарушителя» (того, кого нельзя оставить ни с кем) и оберегай его.



Домашнее задание

1. Кувшины 3 и 5 литров, кран и раковина. Отмерь ровно 1 литр. (Подсказка: загляни в шаги примера 2.)
2. Кувшины 3 и 5 литров, кран и раковина. Отмерь ровно 2 литра.
3. Кувшины 4 и 9 литров, кран и раковина. Отмерь ровно 6 литров.
4. Есть 4 монеты, одна тяжелее. За сколько взвешиваний её точно найти? Опиши схему.
5. Есть 3 монеты, одна тяжелее. Хватит ли одного взвешивания? Как?
6. Есть 27 монет, одна тяжелее. За сколько взвешиваний найти? Почему именно столько? (Подумай про 3^k .)
7. Через реку надо перевезти волка, козу и капусту (правила как в примере 6). Можно ли обойтись **меньше**, чем за 7 рейсов? Объясни.
8. ☆ Есть 12 монет, одна фальшивая, но **неизвестно**, легче она или тяжелее настоящих. Докажи, что за 3 взвешивания можно и найти фальшивую, и

узнать, легче она или тяжелее. (Подсказка: сначала прикинь, сколько всего вариантов и хватает ли $3^3 = 27$ исходов; потом дели по 4.)