

# Урок 10. Итоговая домашняя олимпиада

---

Математика · ~2 часа (можно с перерывом)

## Что это

Это не обычный урок, а твоя личная **олимпиада**. Помнишь, каким ты был девять уроков назад? Тогда слова «инвариант» и «принцип Дирихле» звучали как заклинания. А теперь ты прошёл целый путь: логику, чётность, принцип Дирихле, делимость и остатки, комбинаторику, инварианты и раскраски, игры, геометрию, процессы. Сегодня — финал. Шесть задач, по одной на каждую большую идею курса. Пора показать, на что ты способен.

## Напутствие

Дорогой математик! За эти недели ты научился не просто считать, а **думать** и **доказывать** — а это, поверь, куда круче, чем считать.

Сегодня — праздник. Представь: ты в большом зале, вокруг тихо шуршат ручки, на столе — листок с шестью задачами и твоя любимая ручка. Часы тикают. Это твоя олимпиада, и решаешь ты её сам, без подсказок.

Не волнуйся, если какая-то задача не поддастся сразу. Знаешь, как выглядит работа настоящего олимпиадника? Он садится, думает, пробует, зачёркивает, рисует на полях, снова пробует, ходит кругами по комнате — и вдруг: «Ага! Вот оно!». Эта секунда «ага!» стоит всех мучений. Именно за ней мы и охотимся. Так что не бойся тупиков — они часть пути.

Главное — получай удовольствие и гордись каждой решённой задачей. Удачи, ты справишься!

## Правила

1. **Засеки время:** примерно 2 часа. Если устал — сделай перерыв в середине.
2. Сначала прочитай все шесть задач, начни с той, что нравится больше.
3. **Пиши решение словами.** Ответ без объяснения — это ещё не решение. Объясняй каждый шаг так, будто рассказываешь другу: «я предположил...», «отсюда следует...», «значит...».
4. Если доказываешь, что чего-то **нельзя** — найди инвариант, чётность или раскраску.
5. Если доказываешь, что что-то **можно** — приведи пример и проверь, что он подходит.
6. **Не подглядывай** в разборы, пока не закончишь (или пока не сдашься честно, потратив на задачу хотя бы 10 минут).
7. Когда всё решишь — сверься с разделом «Проверь себя» и заполни себе диплом.



**Лайфхак олимпиадника:** застрял на задаче — не сиди над ней насмерть. Отложи, возьми за другую, а к трудной вернись свежим. Часто решение всплывает само, пока мозг отдыхает на соседней задаче.



## Задачи

**Задача 1 (Логика).** На острове живут рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Встретились трое: Андрей, Боря и Вова.

- Андрей сказал: «Боря — лжец».
- Боря сказал: «Андрей и Вова одинаковые (оба рыцари или оба лжецы)».
- Вова сказал: «Андрей — рыцарь». Кто из них рыцарь, а кто лжец?

**Задача 2 (Чётность).** На доске написаны числа от 1 до 2025. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «-» (перед каждым числом, кроме, может, первого) так, чтобы значение всего выражения равнялось нулю? Ответ обоснуй.

**Задача 3 (Принцип Дирихле).** В классе 30 учеников. За контрольную каждый получил оценку 2, 3, 4 или 5. Докажи, что найдутся хотя бы **восемь** учеников с одинаковой оценкой.

**Задача 4 (Делимость и остатки).** Какой остаток даёт число  $2^{100}$  при делении на 7? Объясни, как ты его нашёл.

**Задача 5 (Комбинаторика).** Сколько существует четырёхзначных чисел, у которых все цифры **разные** и число **чётное**? (Напомним: четырёхзначное число не может начинаться с нуля.)

**Задача 6 (Инвариант / игра / геометрия — на выбор красоты).** В куче лежит 30 камней. Двое играют по очереди, за ход можно взять 1, 2 или 3 камня. Кто возьмёт последний камень — выиграл. У кого есть выигрышная стратегия и в чём она состоит? Подробно опиши, как должен ходить победитель.

---

Закончил? Молодец! Выдохни. Ты только что прошёл настоящую олимпиаду от первой до последней задачи. Это уже победа — независимо от того, сколько решилось.