

# Ответы к заданиям — Олимпиадная математика

---

Загляни сюда только после того, как сам(а) попробовал(а) решить! В олимпиадной математике ценится не ответ, а *доказательство*, поэтому здесь почти везде разбор-рассуждение, а не голая цифра.

## Урок 1. Инварианты

- 1. Нельзя.** Инвариант — чётность числа стаканов, стоящих «неправильно» (вверх дном). Изначально таких 5 (нечётно). Один ход переворачивает ровно 4 стакана, а значит меняет число «неправильных» на чётную величину ( $\$+4, +2, 0, -2, -4\$$  — всегда чётно, ведь переворачиваются 4 стакана, и каждый меняет свой статус). Поэтому чётность числа неправильных стаканов не меняется и остаётся нечётной. Ноль неправильных стаканов (все стоят верно) — чётно, значит недостижимо.
- 2. 9901.** При замене чисел  $\$a, b\$$  на  $\$a+b-1\$$  сумма всех чисел уменьшается ровно на 1. Начинаем со ста чисел, делаем 99 ходов — сумма уменьшается на 99. Начальная сумма  $\$1+2+\dots+100 = 5050\$$ , финальное число  $\$= 5050 - 99 = 4951\$$ . (Инвариант тут — величина «сумма минус количество чисел»:  $\$S - k\$$  не меняется, ведь и сумма, и количество уменьшаются на 1. В начале  $\$5050 - 100 = 4950\$$ , в конце  $\$\text{число} - 1 = 4950\$$ , откуда число  $\$= 4951\$$ .)
- 3. Нельзя.** У каждой фишки при ходе на 2 клетки чётность её координаты сохраняется. Значит инвариант — количество фишек, стоящих на клетках с нечётным номером. В начале фишки на  $\$1, 2, 3\$$ : нечётные позиции — две ( $\$1\$$  и  $\$3\$$ ). В цели  $\$2, 3, 4\$$  нечётная позиция одна ( $\$3\$$ ). Два не равно одному — переход невозможен.
- 4. Не сможет.** Посчитаем, как меняется число голов:  $\$-15+24=+9\$$ ,  $\$-17+2=-15\$$ ,  $\$-20+14=-6\$$ ,  $\$-5+17=+12\$$ . Все изменения ( $\$9, -15, -6, 12\$$ ) кратны 3. Значит остаток числа голов при делении на 3 — инвариант. Вначале  $\$100 \equiv 1$

$\pmod 3$ , и остаётся  $\equiv 1$  навсегда. А  $0 \equiv 0 \pmod 3$ . Ноль голов недостижим — дракон бессмертен.

5. **Не может (только нечётное).** Каждый ход заменяет два числа их суммой, при этом общая сумма всех чисел не меняется — она инвариант. Финальное единственное число равно начальной сумме  $1+2+\dots+2026 = \frac{2026 \cdot 2027}{2} = 2053351$ . Это число нечётно, поэтому чётным результат быть не может.
6. **Доказательство.** Инвариант — произведение всех 64 чисел. Смена знаков целой строки или столбца меняет знак у 8 чисел, то есть умножает произведение на  $(-1)^8 = 1$  — не меняет его. В позиции «все  $+1$ » произведение равно  $+1$ , значит оно  $+1$  всегда. Если бы сумма была  $-2$ , то при 64 клетках со значениями  $\pmod 1$  число минус-единиц равнялось бы 33 (так как  $64 - 2 \cdot 33 = -2$ ). Но тогда произведение равно  $(-1)^{33} = -1 \neq +1$ . Противоречие — такая позиция недостижима.
7. **Нельзя.** Инвариант — произведение всех семи чисел. Ход меняет знак у двух соседних чисел, то есть умножает произведение на  $(-1)^2 = 1$  — не меняет. Вначале одно число  $-1$  и шесть  $+1$ , произведение равно  $-1$ . Оно навсегда останется  $-1$ . У позиции «все  $+1$ » произведение равно  $+1 \neq -1$ . Значит цель недостижима.
8. **★ Да, такой маршрут (замкнутый маршрут коня) существует.** Здесь инвариант *не запрещает*: конь при каждом ходе меняет цвет клетки (с чёрной на белую и наоборот), поэтому замкнутый маршрут из 64 ходов проходит 32 чёрные и 32 белые клетки — ровно поровну, никакого противоречия. Раскраска говорит лишь, что маршрут *не исключён*; чтобы доказать существование, нужно предъявить сам маршрут — а замкнутые обходы конём доски  $8 \times 8$  (их называют «замкнутый маршрут коня») действительно существуют, они хорошо известны и строятся, например, разбиением доски на четверти и соединением четырёх «полумаршрутов» в один цикл. Мораль урока: инвариант доказывает только *невозможность*; когда он не мешает, ответ «да» надо подтверждать конструкцией.

## Урок 2. Раскраски и замощения

- Да, всегда.** Идея (теорема Гомори): центры клеток шахматной доски можно соединить в один замкнутый маршрут, проходящий по всем 64 клеткам (гамильтонов цикл по соседним клеткам). Вдоль этого цикла цвета строго чередуются чёрный-белый. Удалив одну чёрную и одну белую клетку, мы разрываем цикл на два пути (или один), и в каждом куске число клеток чётно, а цвета чередуются — значит каждый кусок легко замощается домино (берём подряд идущие пары). Поэтому оставшиеся 62 клетки всегда замостимы.
- Нельзя.** В доске  $5 \times 5$  ровно 25 клеток — нечётное число. Каждое домино накрывает 2 клетки, поэтому любое домино-замощение покрывает чётное число клеток. 25 нечётно — замостить невозможно.
- Разбор (фиктивная линия существует).** Внутренних линий сетки у доски  $6 \times 6$  пять горизонтальных и пять вертикальных — всего 10. Ключевая лемма: любую внутреннюю линию домино-замощение пересекает *чётное* число раз. (Доказательство: клетки строго по одну сторону линии, но лишь в части столбцов/строк, разбиваются дополнительными доминошками на пары; аккуратный подсчёт по чётности даёт чётное число пересечений.) Всего домино 18, и каждое пересекает ровно одну внутреннюю линию (ту, что лежит между его двумя клетками). Если бы фиктивной линии не было, каждая из 10 линий пересекалась бы  $\geq 1$ , а значит (по лемме)  $\geq 2$  раза — итого  $\geq 20$  пересечений. Но пересечений ровно 18 (по числу домино).  $18 < 20$  — противоречие. Значит хоть одна линия не пересекается ни одним домино.
- Да; квадратик  $1 \times 1$  может стоять только в одной из четырёх клеток  $(3,3), (3,6), (6,3), (6,6)$**  (считая строки и столбцы от 1). Разбор: раскрасим доску одновременно двумя диагональными 3-раскрасками — по правилу  $(i+j) \bmod 3$  и по правилу  $(i-j) \bmod 3$ . Прямое тримино  $1 \times 3$  в каждой из этих раскрасок берёт по одной клетке всех трёх цветов. Подсчёт клеток на доске  $8 \times 8$  даёт, что в раскраске  $(i+j) \bmod 3$  цвет, которого 22 клетки (а не 21), — это цвет 1; аналогично во второй раскраске

«лишний» цвет —  $0$ . Оставшийся после 21 тримино квадратик обязан стоять на клетке, «лишней» в обеих раскрасках одновременно, то есть где  $(i+j) \equiv 1 \pmod 3$  и  $(i-j) \equiv 0 \pmod 3$ . Таких клеток ровно четыре:  $(3,3), (3,6), (6,3), (6,6)$ . Для каждой из них замощение действительно существует (строится явно).

5. **Доказательство.** Отметим «особые» клетки  $(i,j)$  с чётными  $i$  и  $j$  (нумерация от 1 до 10). Их ровно  $5 \times 5 = 25$ . Любая плитка  $2 \times 2$  накрывает ровно одну особую клетку (в её двух строках ровно одна чётная, в двух столбцах — тоже). Любая плитка  $1 \times 4$  накрывает чётное число особых клеток: вертикальная — либо 0, либо 2 (если стоит в чётном столбце); горизонтальная — так же 0 или 2. Пусть плиток  $2 \times 2$  было  $x$ , тогда особых клеток покрыто  $x + (\text{чётное}) = 25$ . Значит  $x$  нечётно. И так, число плиток  $2 \times 2$  в *любой* правильной укладке нечётно. Если бы можно было заменить одну плитку  $2 \times 2$  на одну  $1 \times 4$  и переложить пол, число  $2 \times 2$ -плиток изменилось бы на 1 — сменило бы чётность. Но оно обязано оставаться нечётным. Противоречие — замена невозможна.
6.  **$6 \times 6$  — можно;  $5 \times 6$  — можно.** Приём один и тот же: два L-тримино складываются в прямоугольник  $2 \times 3$ . Доску  $6 \times 6$  режем на  $2 \times 3$ -блоки (например, шесть блоков), каждый мостим двумя уголками. Доску  $5 \times 6$  режем на полосу  $2 \times 6$  (два блока  $2 \times 3$ ) и полосу  $3 \times 6$  (её режем на блоки  $3 \times 2$ , каждый — это тот же  $2 \times 3$ ). Всё замощивается.
7. **Да, можно.** Требуется замкнутая ломаная по центрам, где каждое звено соединяет соседние по стороне клетки, — это гамильтонов цикл в сеточном графе  $8 \times 8$ . Он бипартитен (чёрно-белая раскраска), цикл обязан иметь чётную длину — здесь 64, чётно, препятствия нет. И такой цикл действительно строится: например, «змейка» вниз по первому столбцу... — стандартная конструкция даёт замкнутый обход. Значит ответ «да».
8. **★ Доказательство индукцией по  $n$ .** База  $n=1$ : доска  $2 \times 2$  без одной клетки — это ровно один L-уголок, замощается. Шаг: пусть для доски  $2^{n-1} \times 2^{n-1}$  с любой вырезанной клеткой утверждение верно.

Возьмём доску  $2^n \times 2^n$  с одной вырезанной клеткой и разрежем её на 4 четверти размера  $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ . Вырезанная клетка попала в одну из четвертей. Положим один L-уголок точно в центр доски так, чтобы он накрыл по одной клетке в каждой из трёх «пустых» четвертей (уголок ложится в угол каждой из этих трёх четвертей, сходящихся в центре). Теперь в каждой из четырёх четвертей ровно одна клетка «отсутствует» (в одной — исходно вырезанная, в трёх — накрытая уголком). По предположению индукции каждая четверть замаскируется уголками. Сбрав всё вместе, замостим всю доску. ■

### Урок 3. Принцип Дирихле

1. **Доказательство.** «Клетки» — 12 месяцев года, «кролики» — 30 учеников. Так как  $30 > 12$ , по принципу Дирихле хотя бы в одном месяце родились не меньше двух учеников. (На самом деле даже не меньше  $\lceil 30/12 \rceil = 3$ .)
2. **Доказательство.** Клетки — остатки от деления на 11 (их 11: от 0 до 10). Двенадцать чисел раскладываем по остаткам;  $12 > 11$ , значит два числа  $a, b$  дают равный остаток. Тогда  $a-b$  делится на 11.
3. **Пара любого цвета — 4 носка. Синяя пара — 22 носка.** Для пары любого цвета: 3 цвета — «клетки»; вытащив 3 носка, можно получить по одному каждого цвета, но 4-й обязательно совпадёт по цвету с одним из первых трёх (Дирихле: 4 носка, 3 цвета). Три носка не гарантируют (могут быть все разные). Для синей пары: в худшем случае невезения сначала вытащим все 10 красных и все 10 зелёных (20 носков, ни одной синей пары), потом 2 синих. Итого  $10+10+2 = 22$  гарантируют синюю пару; 21 носка мало (могло быть 20 не-синих и 1 синий).
4. **Доказательство.** Сопоставим каждому числу его остаток  $r$  по модулю 100 и объединим остатки в «клетки» так: пара  $\{r, 100-r\}$  — одна клетка (для  $r=1, \dots, 49$ ), плюс отдельные клетки  $\{0\}$  и  $\{50\}$ . Всего клеток  $49 + 2 = 51$ . Чисел 52, значит два числа попадают в одну клетку. Если у них равный

остаток — их разность делится на 100. Если остатки  $r$  и  $100-r$  — их сумма делится на 100. В любом случае условие выполнено.

5. **Доказательство.** Разобьём треугольник со стороной 1 средними линиями на 4 маленьких равносторонних треугольника со стороной  $\frac{1}{2}$ . Точек 5, треугольничков 4 — по Дирихле в один попадут две точки. Расстояние между точками внутри треугольника со стороной  $\frac{1}{2}$  не превосходит его наибольшей стороны, то есть  $\frac{1}{2}$ . (Договоримся точки на общих границах относить к одному из треугольничков.)
6. **Доказательство.** Рассмотрим частичные суммы  $s_0 = 0$ ,  $s_1 = a_1$ ,  $s_2 = a_1 + a_2$ , ...,  $s_{100} = a_1 + \dots + a_{100}$  — всего 101 число. Их остатки по модулю 100 — «кролики» в 100 «клетках» (остатки  $0..99$ ).  $101 > 100$ , значит два из них,  $s_i$  и  $s_j$  ( $i < j$ ), дают одинаковый остаток. Тогда  $s_j - s_i = a_{i+1} + \dots + a_j$  делится на 100 — это и есть искомая непустая группа чисел.
7. **Доказательство.** Возьмём равносторонний треугольник со стороной 1. Его три вершины покрашены в два цвета, значит по Дирихле какие-то две вершины одного цвета. Расстояние между вершинами равно 1. Готово: нашлись две точки одного цвета на расстоянии ровно 1.
8. ★ **Доказательство.** Каждое число  $x$  из  $\{1, \dots, 200\}$  запишем как  $x = 2^k \cdot m$ , где  $m$  нечётно. Нечётных  $m$  в диапазоне  $1..199$  ровно 100 (это  $1, 3, 5, \dots, 199$ ) — они и будут «клетками». Выбрано 101 число; по Дирихле у двух выбранных чисел одинаковая нечётная часть  $m$ : пусть это  $2^a m$  и  $2^b m$  с  $a < b$ . Тогда меньшее  $2^a m$  делит большее  $2^b m$  (частное  $2^{b-a}$  — целое). Значит одно из выбранных чисел делится на другое.

## Урок 4. Графы

1. **Невозможно.** Люди — вершины, рукопожатия — рёбра; каждая из 9 вершин имеет степень 3. Сумма степеней  $= 9 \cdot 3 = 27$  — нечётна. Но по лемме о рукопожатиях сумма степеней равна  $2E$  и всегда чётна. Противоречие.

2. **Ни одной, ни трёх — нельзя.** Число вершин нечётной степени всегда чётно (следствие леммы о рукопожатиях: сумма степеней чётна, значит нечётных слагаемых чётное число). Одна и три — нечётные количества, поэтому невозможны.
3. **Доказательство.** У графа 6 вершин, каждая степени  $\geq 3$ , значит сумма степеней  $\geq 18$ , а рёбер  $E = \frac{1}{2} \sum \deg \geq 9$ . Лес (граф без циклов) на 6 вершинах имеет не более  $6-1 = 5$  рёбер. У нас рёбер  $\geq 9 > 5$ , значит граф не лес — в нём есть цикл.
4. **Минимум 9, максимум 45.** Связный граф на 10 вершинах имеет не меньше  $10-1 = 9$  рёбер (это дерево — минимально связный граф). Максимум рёбер без кратных и петель — это когда соединены все пары:  $\binom{10}{2} = 45$ .
5. **Нельзя.** Клетки  $3 \times 3$  — вершины, ходы коня — рёбра. Из центральной клетки конь не может пойти никуда в пределах  $3 \times 3$  (все его ходы уводят за доску). Значит центральная вершина изолирована (степень 0). Обход, посещающий все вершины, должен зайти и в неё, но попасть в изолированную вершину нельзя. Поэтому маршрута коня по всем 9 клеткам не существует.
6. **Пример.** «Да»-фигура: любой замкнутый контур, например квадрат с двумя диагоналями (каждая вершина — угол квадрата степени 3... тогда 4 нечётных вершины — не рисуется). Возьмём проще: **треугольник** — все три вершины степени 2 (чётные), рисуется одним росчерком (эйлеров цикл). **«Нет»-фигура:** четырёхлучевая звезда/«крест» из четырёх отрезков, выходящих из центра, плюс замыкающий контур так, чтобы получилось 4 вершины нечётной степени — например, полный граф на 4 вершинах  $K_4$ : там все 4 вершины степени 3, нечётных вершин четыре ( $> 2$ ), поэтому эйлерова пути нет — одним росчерком не нарисовать. (Обоснование в обоих случаях — критерий Эйлера по числу вершин нечётной степени: 0 или 2 — можно, иначе — нельзя.)
7. **Доказательство.** Города — вершины, дороги — рёбра; каждая вершина степени  $\geq 2$ . Пойдём гулять: выйдем из любого города и будем идти по дорогам, не повторяя рёбер. Всякий раз, входя в новый город, мы вошли по

одному ребру, а так как степень  $\geq 2$ , найдётся ещё не использованное ребро, чтобы выйти. Города конечны, поэтому рано или поздно мы придём в город, где уже были, — участок пути между двумя визитами в этот город образует замкнутый маршрут (цикл) без повторов дорог.

8. ★ **Идея (теорема Дирака).** Утверждение: если у каждого из  $n \geq 3$  человек не меньше  $n/2$  знакомых, то всех можно усадить за круглый стол так, что соседи всегда знакомы (гамильтонов цикл существует). Для  $n=4$ : условие даёт каждому  $\geq 2$  знакомых. Проверим, что тогда цикл есть. Если кто-то знаком со всеми тремя — разложим остальных так, чтобы замкнуть; при минимальной степени 2 у всех граф на 4 вершинах — это либо квадрат (уже цикл), либо содержит цикл длины 4 (несложный перебор). **Почему условие  $n/2$  существенно:** возьмём два треугольника (две компании по 3 человека), которые между собой не знакомы вовсе. Тогда  $n=6$ , у каждого 2 знакомых — но  $2 < n/2 = 3$ . Граф несвязен, за один круглый стол их не усадить: соседями двух компаний оказались бы незнакомцы. Значит порог  $n/2$  нельзя понизить. (Полное доказательство теоремы использует приём «крайнего» — берут самый длинный путь и раздвигают его; это классика, которую стоит однажды разобрать целиком.)

## Урок 5. Игры и стратегии

1. **Выигрывает второй.** Проигрышные для того, кому ходить, — суммы, кратные 5 ( $0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$ ), потому что из них любой ход (прибавить  $1-4$ ) выводит в некрatную пятёрке сумму, а из некрatной всегда можно вернуть противника на кратную. Стартовая сумма  $0$  кратна 5 — значит первый игрок ходит из проигрышной позиции. Стратегия второго: после хода первого (тот прибавил  $k$ ) прибавлять  $5-k$ , снова оставляя кратную 5 сумму; в итоге второй назовёт 30 и победит.
2. **Выигрывает первый.** Теперь назвавший 30 проигрывает, значит цель — заставить соперника назвать 30, то есть самому оставить сумму 29 (тогда сопернику придётся прыгнуть в  $30-33$ , а разрешено только до 30, и он

вынужден сказать 30). «Хорошие» суммы, которые нужно оставлять сопернику:  $\$4, 9, 14, 19, 24, 29\$$  (это  $\$30 - 1\$$  и дальше с шагом 5, то есть  $\$ \equiv 4 \pmod{5}$ ). Первый первым ходом берёт 4 (сумма 4), далее отвечает на ход  $\$k\$$  соперника числом  $\$5-k\$$ . В итоге он оставит 29 и вынудит соперника назвать 30.

3. **Выигрывает второй.** Две равные кучки — классическая симметрия. Что бы первый ни взял из одной кучки, второй берёт столько же из другой, восстанавливая равенство. После каждого хода второго кучки снова равны, поэтому у второго всегда есть ответ, и последний камень возьмёт именно он. (На языке нима: ним-сумма  $\$10 \oplus 10 = 0\$$  — позиция проигрышна для того, кто ходит, то есть для первого.)
4. **Выигрывает второй.** Фишка идёт из угла в противоположный угол доски  $\$8 \times 8\$$ , каждый ход сдвигает её на 1 клетку вправо или вверх. Чтобы дойти, нужно ровно 7 шагов вправо и 7 вверх — всего  $\$14\$$  ходов, *независимо* от игры (это скрытый инвариант — длина пути фиксирована). 14 чётно: ходы 1,3,...,13 делает первый, ходы 2,4,...,14 — второй. Последний, 14-й ход делает второй, после чего первый не может ходить и проигрывает.
5. **Выигрывает первый.** Ним-сумма кучек  $\$4,7,9\$$ : в двоичном  $\$100, 111, 1001\$$ ; XOR по разрядам  $\$ = 1010_2 = 10 \neq 0\$$ , значит позиция выигрышна для первого. Выигрышный ход: превратить ним-сумму в 0. Ищем кучку  $\$p\$$ , для которой  $\$p \oplus 10 < p\$$ : для  $\$p=9\$$  имеем  $\$9 \oplus 10 = 3 < 9\$$ . Значит нужно **из кучки 9 сделать 3** (взять 6 камней). Останутся кучки  $\$4,7,3\$$  с ним-суммой  $\$4 \oplus 7 \oplus 3 = 0\$$  — теперь в проигрышной позиции соперник.
6. **Выигрывает второй.** Стратегия центральной симметрии. После каждого хода первого (он кладёт домино) второй кладёт домино на клетки, симметричные относительно центра доски. Так как доска  $\$8 \times 8\$$  имеет чётные стороны, её центр — не клетка, а точка на пересечении линий; поэтому домино и его центрально-симметричный образ никогда не пересекаются и не совпадают (проверяется: ни одно домино не переходит само в себя при повороте на  $\$180^\circ\$$ ). Значит у второго всегда есть законный симметричный ответ, и без хода первым останется именно первый — он и проиграет.

7. **Проигрышные позиции, кратные 3** ( $\$0, 3, 6, 9, \dots\$$ ). Разбор: последний взявший выигрывает, значит  $\$n=0\$$  (ходить некому) — проигрыш. Из позиции, кратной 3, любой ход берёт степень двойки ( $\$1,2,4,8,\dots\$$ ), а все степени двойки дают остаток 1 или 2 по модулю 3 (никогда 0:  $\$1,2,4,8,16,\dots \equiv 1,2,1,2,\dots\$$ ). Поэтому из кратной 3 позиции нельзя попасть снова в кратную 3 — попадаешь в некрatную (выигрышную для соперника). А из некрatной 3 позиции всегда можно взять 1 или 2 (обе — степени двойки), вернув соперника на кратную 3. Значит кратные 3 — ровно проигрышные позиции. В частности из  $\$100\$$  ( $\$100 = 3 \cdot 33 + 1\$$ , не кратно 3) первый выигрывает, взяв 1 камень.
8. ★ **Выигрывает первый.** Ключ — скрытый инвариант: сколько бы кусок ни ломали, каждый разлом увеличивает число кусочков ровно на 1. Начинаем с 1 куска ( $\$5 \times 8\$$ ), заканчиваем, когда все  $\$40\$$  долек разделены, то есть  $\$40\$$  кусочков. Значит всего будет сделано ровно  $\$40 - 1 = 39\$$  разломов — *независимо* от того, как играют. Число ходов в игре фиксировано и равно 39 (нечётно). Первый делает ходы  $\$1,3,\dots,39\$$  — то есть последний, 39-й разлом. После него ломать нечего, второй не может ходить и проигрывает.

## Урок 6. Модульная арифметика

- Остаток 1.**  $\$2 \equiv -1 \pmod 3\$$ , поэтому  $\$2^{100} \equiv (-1)^{100} = 1 \pmod 3\$$ .
- Последняя цифра 9.** Последние цифры степеней тройки идут с периодом 4:  $\$3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \dots\$$ . Так как  $\$2026 = 4 \cdot 506 + 2\$$ , последняя цифра  $\$3^{2026}\$$  такая же, как у  $\$3^2 = 9\$$ , то есть **9**.
- Не делится; репьюнит из  $\$k\$$  единиц делится на 3  $\Leftrightarrow \$k\$$  делится на 3.** Сумма цифр репьюнита из 2026 единиц равна 2026. Число сравнимо со своей суммой цифр по модулю 3, а  $\$2026 = 3 \cdot 675 + 1 \equiv 1 \pmod 3\$$  — не делится на 3, значит и само число не делится. Вообще сумма цифр репьюнита из  $\$k\$$  единиц равна  $\$k\$$ , поэтому он делится на 3 ровно тогда, когда  $\$k\$$  кратно 3 (например, из 3, 6, 9, ... единиц).

4. **На 9 делится, на 11 — нет.** Сумма цифр  $1+2+\dots+9 = 45$  делится на 9  $\rightarrow$  число делится на 9. Знакопеременная сумма цифр (с конца):  $9-8+7-6+5-4+3-2+1 = 5$ , не делится на 11  $\rightarrow$  число на 11 не делится.
5. **Доказательство.** Достаточно показать, что  $a^5 \equiv a \pmod{5}$  для любого целого  $a$  (тогда  $\sum k^5 \equiv \sum k \pmod{5}$ ). Проверим по остаткам:  $0^5=0$ ,  $1^5=1$ ,  $2^5 = 32 \equiv 2$ ,  $3^5 = 243 \equiv 3$ ,  $4^5 = 1024 \equiv 4 \pmod{5}$  — везде  $a^5 \equiv a$ . Значит  $\sum_{k=1}^{100} k^5 \equiv \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050 \equiv 0 \pmod{5}$ . Сумма делится на 5.
6. **Остаток 2.**  $2^4 \equiv 2 \pmod{5}$ , поэтому  $2^{17} \equiv 2^{4 \cdot 4 + 1} \equiv 2^1 \equiv 2 \pmod{5}$ . Степени двойки по модулю 5 имеют период 4:  $2, 4, 3, 1, \dots$ ;  $2^{17} = 4 \cdot 4 + 1$ , значит  $2^{17} \equiv 2^1 = 2 \pmod{5}$ .
7. **Доказательство.**  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ , множители попарно взаимно просты, поэтому достаточно доказать делимость  $n^5 - n$  на 2, на 3 и на 5 по отдельности. • *На 5:* как в задаче 5,  $n^5 \equiv n \pmod{5}$ , значит  $5 \mid n^5 - n$ . • *На 2 и на 3:*  $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ . Среди  $n-1, n, n+1$  (три подряд идущих) есть чётное и есть кратное трём, значит произведение делится и на 2, и на 3. Итого  $n^5 - n$  делится на  $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ .
8. **★ Доказательство.** Число  $\overline{abcabc}$  можно записать так:  
 $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = \overline{abc} \cdot 1001$ . А  $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ . Значит  $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$  делится и на 7, и на 11, и на 13 при любом трёхзначном  $\overline{abc}$ . (Например,  $538538 = 538 \cdot 1001$ .)

## Урок 7. Комбинаторные оценки

1.  **$\binom{8}{3} = 56$ .** Выбор трёх книг из восьми без учёта порядка:  
 $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ .
2. **54 диагонали.** Всего пар вершин у 12-угольника  $\binom{12}{2} = 66$ . Из них 12 пар — это стороны (соседние вершины), остальные — диагонали:  $66 - 12 =$

54\$.

3. **Доказательство.** У каждого из 10 человек число друзей внутри компании — целое от 0 до 9 (10 возможных значений). Но значения 0 и 9 не могут встретиться одновременно: если кто-то дружит со всеми девятью (степень 9), то ни у кого не может быть 0 друзей (он-то дружит с этим человеком). Значит реально возможных значений не больше 9. Людей 10, «клеток» (значений) не больше 9 → по Дирихле у двоих число друзей совпадает.
4. **Доказательство (двойной подсчёт).** Посчитаем число подмножеств множества из  $n$  элементов двумя способами. *Способ 1:* каждый элемент независимо либо входит, либо не входит в подмножество — по правилу произведения  $2^n$  подмножеств. *Способ 2:* сгруппируем подмножества по их размеру  $k$ : подмножеств размера  $k$  ровно  $\binom{n}{k}$ , а  $k$  пробегает  $0, 1, \dots, n$ . Всего  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$ . Оба способа считают одно и то же, поэтому сумма равна  $2^n$ .
5. **Отрезков 21, треугольников 35.** Никакие три из 7 точек не лежат на прямой, поэтому каждая пара точек даёт отрезок:  $\binom{7}{2} = 21$ . Каждая тройка точек — вершины треугольника:  $\binom{7}{3} = 35$ .
6. **Доказательство (теорема Мантеля).** Команды — вершины, сыгранные матчи — рёбра графа на 20 вершинах; рёбер 101, «тройка попарно сыгравших» — это треугольник. Докажем, что при  $> 100$  рёбрах треугольник обязан быть. Предположим противное: граф без треугольников. Возьмём ребро между командами  $u$  и  $v$ . Тогда у  $u$  и  $v$  нет общего соперника (иначе был бы треугольник), поэтому  $\deg(u) + \deg(v) \leq 20$  (их соседи не пересекаются, а всего вершин 20). Просуммируем это неравенство по всем 101 ребру: слева каждое ребро  $u v$  даёт  $\deg(u) + \deg(v)$ ; вершина степени  $d$  учитывается в  $d$  рёбрах, поэтому сумма слева равна  $\sum_v \deg(v)^2$ . Справа —  $20$  на каждое ребро, итого  $\sum_v \deg(v)^2 \leq 20 \cdot 101 = 2020$ . С другой стороны, по неравенству о средних (или Коши)  $\sum \deg(v)^2 \geq \frac{(\sum \deg v)^2}{20} = \frac{(2 \cdot 101)^2}{20} = \frac{202^2}{20} = \frac{40804}{20} = 2040,2$ . Получаем  $2040,2 \leq \sum \deg^2 \leq 2020$  — противоречие. Значит треугольник есть. (Сравни: при ровно 100 матчах контрпример существует —

разбей команды на две группы по 10 и соедини рёбрами все пары из разных групп:  $10 \cdot 10 = 100$  матчей, ни одного треугольника, ведь внутри групп матчей нет.)

7. **Можно ровно тогда, когда  $n$  чётно.** Инвариант — чётность числа горящих лампочек. Каждый ход переключает две лампочки, поэтому число горящих меняется на  $+2$ ,  $0$  или  $-2$  — чётность числа горящих сохраняется. Вначале горящих  $0$  (чётно), значит горящих всегда чётное число. Позиция «все горят» имеет  $n$  горящих. Если  $n$  нечётно — недостижимо (нечётное  $\neq$  чётное). Если  $n$  чётно — достижимо: переключая пары соседних лампочек  $(1,2)$ ,  $(3,4)$ ,  $\dots$ ,  $(n-1,n)$ , зажжём все. Итог: все лампочки удаётся зажечь  $\Leftrightarrow n$  чётно.
8. **★ Доказательство.** Посмотрим на 7 столбцов; в каждом 3 клетки двух цветов, значит какой-то цвет в столбце встречается не меньше двух раз («цвет большинства» столбца — хотя бы 2 клетки этого цвета). Цвета два, столбцов 7, поэтому по принципу Дирихле у не менее чем  $\lceil 7/2 \rceil = 4$  столбцов цвет большинства одинаков — пусть это чёрный. Итак есть 4 столбца, в каждом из которых хотя бы 2 чёрные клетки. В каждом таком столбце выберем пару строк с чёрными клетками; пара строк — это одна из  $\binom{3}{2} = 3$  возможных пар  $\{1,2\}$ ,  $\{1,3\}$ ,  $\{2,3\}$ . У нас 4 столбца и всего 3 возможные пары строк — снова Дирихле: у двух из этих столбцов чёрная пара строк совпадает. Эти два столбца и эти две строки дают прямоугольник, все 4 угла которого чёрные. Одноцветный прямоугольник найден. ■