Урок 2. Раскраски и замощения: шахматная доска как оружие

Олимпиадная математика · ~40 минут

Домино накрывает две соседние клетки. Простая штука. Но если раскрасить доску как шахматную, домино вдруг превращается в детектор: оно *всегда* накрывает одну чёрную и одну белую клетку. И это крошечное наблюдение позволяет доказывать, что целые доски замостить невозможно. Раскраска — это способ спрятать инвариант в цвет.

🎯 Что ты узнаешь

- Шахматную раскраску и почему домино её «уважает»
- Как доказывать невозможность замощения через подсчёт цветов
- Раскраски не в 2, а в 3 и более цветов — для тримино и других фигур
- Как выбирать раскраску под конкретную фигуру

📖 Разбираемся в теме

Шахматная раскраска

Раскрасим доску 8×8 в чёрный и белый как шахматную: соседние по стороне клетки разного цвета. Тогда чёрных клеток 32 и белых 32.

Ключевой факт: любая костяшка домино (1×2), как бы её ни положить, накрывает ровно одну чёрную и одну белую клетку. Потому что соседние клетки всегда разного цвета.

> 📌 **Запомни:** Если фигуры замощения всегда покрывают равное число клеток каждого цвета, а на доске цветов поровну не хватает — замощение невозможно.

Классика: доска без двух углов

Вырежем из доски 8×8 две противоположные угловые клетки. Останется 62 клетки. Можно ли замостить их 31 костяшкой домино?

Противоположные углы шахматной доски — **одного цвета** (проверь: клетки $(1,1)$ и $(8,8)$ обе, скажем, чёрные). Убрав две чёрные, получим 30 чёрных и 32 белых. Но каждое домино берёт по одной клетке каждого цвета, значит 31 домино взяли бы 31 чёрную и 31 белую. А чёрных всего 30 — противоречие. **Замостить нельзя.** ∎

> 🤔 **А знаешь ли ты?** Эта задача называется «задача о мутированной шахматной доске» и её любят задавать на собеседованиях. Без идеи раскраски она кажется «переборной» и безнадёжной, а с раскраской решается в две строки.

Раскраски в несколько цветов

Для фигур посложнее двух цветов мало. Возьмём прямое тримино (полоска 1×3). Раскрасим доску в **три цвета по диагоналям** — клетку (i,j) красим в цвет $(i+j)\bmod 3$. Тогда любая полоска 1×3 (горизонтальная или вертикальная) накрывает по одной клетке каждого из трёх цветов. Это мощный детектор для задач с тримино.

> 💡 Правило подбора: раскрашивай так, чтобы твоя фигура при любом положении покрывала цвета *поровну* или хотя бы *предсказуемо*. Тогда несовпадение количеств цветов на доске = невозможность.

L-тримино и раскраска в 4 цвета / другие трюки

Не всякая фигура ведёт себя одинаково при повороте — тогда одноцветный подсчёт не срабатывает, и приходится комбинировать: раскраска + чётность, или раскрашивать не всю доску, а только «опасные» клетки.

> ⚠️ Раскраска доказывает только **невозможность**. Если раскраска «не запрещает» — это ещё не значит, что замощение существует; его нужно предъявить явно.

✍️ Разбор задачи

Задача. Можно ли замостить доску 10×10 прямоугольниками 1×4 (полосками из четырёх клеток, которые можно класть и горизонтально, и вертикально)?

Решение. Обычная шахматная раскраска тут бессильна: полоска 1×4 всегда берёт 2 чёрные и 2 белые клетки, и никакого перекоса не возникает. Нужна более хитрая раскраска.

Раскрасим **столбцы** циклически в цвета $1,2,3,4,1,2,3,4,1,2$. Посчитаем, сколько клеток каждого цвета. Цвета столбцов: $1,2,3,4,1,2,3,4,1,2$ — цвет 1 в столбцах ${1,5,9}$ (3 столбца), цвет 2 в ${2,6,10}$ (3 столбца), цвет 3 в ${3,7}$ (2 столбца), цвет 4 в ${4,8}$ (2 столбца). Каждый столбец содержит 10 клеток, поэтому:

- цвет 1: 30 клеток, цвет 2: 30, цвет 3: 20, цвет 4: 20.

Горизонтальная полоска 1×4 покрывает 4 столбца подряд — по одной клетке каждого из 4 цветов. Вертикальная полоска стоит в одном столбце — покрывает 4 клетки **одного** цвета.

Пусть в замощении h горизонтальных и v_1,v_2,v_3,v_4 вертикальных полосок в столбцах цветов $1,2,3,4$. Клеток цвета 3 всего 20, их дают горизонтальные (по одной на каждую) и вертикальные цвета 3 (по 4): $h + 4v_3 = 20$. Аналогично цвет 4: $h + 4v_4 = 20$, цвет 1: $h + 4v_1 = 30$, цвет 2: $h + 4v_2 = 30$.

Вычтем первое из третьего: $4v_1 - 4v_3 = 10$, то есть $v_1 - v_3 = 2{,}5$ — **не целое!** Противоречие. Значит, замостить доску 10×10 полосками 1×4 **невозможно**. ∎

Красиво, правда? Одна хитрая раскраска столбцов — и всё разваливается на арифметику.

📝 Задачи

1. Из доски 8×8 вырезали одну белую и одну чёрную клетку (произвольные). Всегда ли оставшиеся 62 клетки можно замостить 31 домино? Обоснуй (тут ответ «да» — попробуй придумать идею, почему).
2. Можно ли замостить доску 5×5 костяшками домино 1×2? Почему?
3. Доску 6×6 замостили 18 костяшками домино. Докажи, что найдётся прямая (горизонтальная или вертикальная линия сетки), которая не пересекает ни одной костяшки. *(Знаменитый факт; но сначала попробуй хотя бы для 4×4.)*
4. Можно ли доску 8×8 замостить 21 прямым тримино 1×3 и одним квадратиком 1×1? Если да — где может стоять квадратик? (Используй раскраску в 3 цвета.)
5. Комнату 10×10 хотят выложить плитками 1×4 и 2×2. Осталась одна плитка 2×2, а вместо неё привезли 1×4. Докажи, что теперь выложить пол этими плитками нельзя (то есть заменить одну 2×2 на одну 1×4 и переложить весь пол не удастся).
6. Можно ли замостить доску 6×6 уголками-тримино (L-тримино из 3 клеток)? А доску 5×6?
7. На доске 8×8 отметили центры всех клеток. Можно ли соединить их одной замкнутой ломаной из 64 звеньев так, чтобы каждое звено соединяло центры соседних по стороне клеток и ломаная проходила через каждый центр ровно раз? (Раскраска подскажет ответ.)
8. ⭐ Доску $2^n \times 2^n$ с одной вырезанной (любой) клеткой всегда можно замостить L-тримино (уголками из 3 клеток). Докажи это для всех $n\ge 1$. (Подсказка: индукция и деление доски на 4 четверти.)