Урок 3. Принцип Дирихле: кроликов больше, чем клеток

Олимпиадная математика · ~40 минут

Если 10 кроликов рассадить по 9 клеткам, то в какой-то клетке окажется хотя бы два кролика. Очевидно? Абсолютно. Но эта детская банальность — один из самых мощных инструментов олимпиадной математики. Весь фокус в том, чтобы придумать, кто тут «кролики» и кто «клетки».

🎯 Что ты узнаешь

- Точную формулировку принципа Дирихле и обобщённый вариант
- Как выбирать «клетки», чтобы задача решилась
- Геометрический Дирихле — точки внутри фигуры
- Приложения к делимости

📖 Разбираемся в теме

Простой принцип

> 📌 **Запомни:** Если n предметов разложены по k ящикам и $n > k$, то хотя бы в одном ящике лежит не меньше двух предметов.

Доказательство «от противного» в одну строку: если бы в каждом ящике было ≤ 1 предмета, всего было бы $\le k$ предметов, но их $n > k$. Противоречие.

Обобщённый принцип

Что, если предметов сильно больше ящиков?

> 📌 **Запомни:** Если n предметов разложены по k ящикам, то в каком-то ящике лежит **не меньше** $\lceil n/k \rceil$ предметов (потолок — округление

> вверх).

Почему: если бы в каждом ящике было $\le \lceil n/k\rceil - 1$ предметов, всего было бы не больше $k\cdot(\lceil n/k\rceil - 1) < n$ — проверь, что это действительно меньше n. Значит, где-то предметов не меньше $\lceil n/k\rceil$.

> 💡 Аналогично есть «зеркальный» принцип: в каком-то ящике **не больше** $\lfloor n/k\rfloor$ предметов (пол — округление вниз). Оба варианта полезны: один даёт оценку «хотя бы столько-то», другой «не больше чем».

Как придумать клетки

Это главная трудность. Клетки почти никогда не даны в условии — их надо изобрести. Частые идеи:

- **остатки от деления** (клетки = возможные остатки);
- **части фигуры** (клетки = кусочки, на которые разбита область);
- **пары/суммы/разности** значений.

> 🤔 **А знаешь ли ты?** Принцип назван в честь Дирихле (XIX век), но по-английски он называется *pigeonhole principle* — «принцип голубятни»: голуби садятся в ячейки голубятни. Кролики и голуби — одна и та же идея.

Геометрический Дирихле

Если фигуру площади (или длины, объёма) S разбить на k частей и внутри разместить n точек с $n>k$, то в какую-то часть попадёт ≥ 2 точки. Значит, между ними расстояние не больше диаметра части.

> ⚠️ Тонкость: точки на границе двух частей надо заранее договориться относить к одной из частей, иначе «одна точка в двух клетках».

✍️ Разбор задачи

Задача. Докажи, что среди любых 6 целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

Решение. Клетки — это остатки от деления на 5: их ровно пять — $0,1,2,3,4$. Каждое из шести чисел попадает в клетку по своему остатку. Кроликов 6, клеток 5, $6>5$ — по принципу Дирихле два числа a и b попадут в одну клетку, то есть дадут одинаковый остаток при делении на 5. Тогда $a-b$ делится на 5 (разность чисел с равными остатками кратна модулю). ∎

Задача (геометрия). В квадрат со стороной 1 бросили 5 точек. Докажи, что какие-то две из них находятся на расстоянии не больше $\frac{\sqrt2}{2}$.

Решение. Разобьём квадрат 1×1 на 4 маленьких квадрата со стороной $\tfrac12$ (клетки). Точек 5, квадратиков 4, значит в какой-то квадратик попадут хотя бы две точки. Расстояние между двумя точками одного квадратика не превосходит его диагонали $\frac{\sqrt2}{2}$ (диагональ квадрата со стороной $\tfrac12$ равна $\tfrac12\cdot\sqrt2$). Значит, эти две точки на расстоянии $\le \frac{\sqrt2}{2}$. ∎

📝 Задачи

1. В классе 30 учеников. Докажи, что хотя бы двое из них родились в один месяц.
2. Докажи, что среди любых 12 целых чисел найдутся два, разность которых делится на 11.
3. В коробке лежат носки: 10 красных, 10 синих и 10 зелёных, вперемешку и в темноте. Сколько носков надо вытащить, чтобы гарантированно получить пару одного цвета? А чтобы гарантированно получить синюю пару?
4. Докажи, что среди любых 52 целых чисел найдутся два, у которых либо сумма, либо разность делится на 100.

5. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 отметили 5 точек. Докажи, что какие-то две из них на расстоянии не больше $\tfrac12$.
6. Дано 100 целых чисел. Докажи, что из них можно выбрать несколько (хотя бы одно), сумма которых делится на 100. (Подсказка: рассмотри частичные суммы a_1, a_1+a_2, $\dots$ и их остатки.)
7. Каждую точку плоскости покрасили в один из двух цветов. Докажи, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии ровно 1. (Подсказка: рассмотри вершины подходящего равностороннего треугольника или более хитрой фигуры.)
8. ⭐ Из чисел $1, 2, 3, \dots, 200$ выбрали 101 число. Докажи, что среди выбранных обязательно найдутся два, одно из которых делится на другое. (Подсказка: каждое число запиши как $2^k\cdot m$ с нечётным m; чем могут быть «клетки»?)