

Урок 2. Размерность — как угадать формулу, не выводя её

Физика вокруг нас · ~35 минут

Представь, что ты забыл формулу периода маятника. Плохо? А вот и нет. Оказывается, физическую формулу часто можно **восстановить из воздуха** — просто следя за тем, чтобы единицы измерения слева и справа совпадали. Этот метод называется анализом размерностей, и он не раз выручал даже великих: так оценивали мощность ядерного взрыва и скорость ударных волн. Сегодня научимся угадывать формулы.

Что ты узнаешь

- Что такое размерность величины и почему складывать метры с секундами — преступление.
- Как проверить любую формулу на ошибку за 10 секунд.
- Как **угадать** формулу периода маятника и скорости волн, не решая ни одного уравнения.
- Систему СИ и её семь китов.

Разбираемся в теме


Размерность — это «из чего сделана» величина

У каждой физической величины есть **размерность** — рецепт, из каких базовых «кирпичиков» она собрана. В механике таких кирпичиков всего три: длина (обозначим **L**), масса (**M**) и время (**T**). Размерность показывает, в каких степенях эти три входят в величину.

Откуда берётся размерность? Её не надо зубрить — достаточно взять определение величины и подставить размерности кусочков. Пройдём по цепочке, каждый раз опираясь на предыдущий результат:

- **Скорость** $v = \text{путь} / \text{время}$. Путь мы меряем в метрах (это L), время — в секундах (это T). Значит размерность скорости — L/T (метры в секунду).
- **Ускорение** $a = \text{изменение скорости} / \text{время}$. Берём уже известную размерность скорости L/T и делим ещё раз на время T : $(L/T)/T = L/T^2$ (м/с²).
- **Сила** — из второго закона Ньютона $F = m \cdot a$. Умножаем массу (M) на ускорение (L/T^2): $M \cdot (L/T^2) = M \cdot L/T^2$. Эту комбинацию и назвали ньютоном: $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$.
- **Энергия** (работа) $E = \text{сила} \times \text{путь}$. Умножаем силу ($M \cdot L/T^2$) на длину (L): $(M \cdot L/T^2) \cdot L = M \cdot L^2/T^2$. Это джоуль: $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$.
- **Давление** $p = \text{сила} / \text{площадь}$. Делим силу ($M \cdot L/T^2$) на площадь (L^2): $(M \cdot L/T^2)/L^2 = M/(L \cdot T^2)$. Это паскаль.

Видишь приём? Размерность любой механической величины — это всегда что-то вида $L^a \cdot M^b \cdot T^c$; надо лишь читать формулу-определение и перемножать размерности частей.

 **Запомни:** складывать и сравнивать можно только величины одной размерности. Метры плюс метры — можно. Метры плюс секунды — бессмыслица. Это железное правило и есть двигатель всего метода.

Проверка формул на размерность

Прежде чем доверять формуле, проверь: совпадает ли размерность левой и правой части?

Пример. Кинетическая энергия $E = mv^2/2$. Слева — джоуль, $M \cdot L^2/T^2$. Справа: m даёт M , v^2 даёт $(L/T)^2 = L^2/T^2$. Вместе $M \cdot L^2/T^2$. **Совпало** — формула имеет право на жизнь. (Коэффициент $1/2$ размерность не проверяет — числа безразмерны.)

Пример-ловушка. Тебе предлагают «формулу» пути при равноускоренном движении $s = at$. Проверим: справа $a \cdot t$ это $(L/T^2) \cdot T = L/T$ — получилась скорость, а не длина! **Не совпало** — формула неверна. Правильно $s = at^2/2$, тогда $(L/T^2) \cdot T^2 = L$. Порядок восстановлен.

💡 Всегда проверяй размерность нового результата. Если получил в ответе «5 кг·с» там, где ждал метры, — где-то ошибка в выкладках. Размерность ловит опечатки лучше учителя.

Угадываем формулу маятника

Вот где начинается магия. Мы забыли формулу периода T (время одного качания) — и восстановим её из одних только размерностей. Пойдём медленно, по шагам.

Шаг 1. Выпиши, от чего величина вообще может зависеть. Разумные кандидаты для маятника:

- длина нити L — размерность L ;
- масса груза m — размерность M ;
- ускорение свободного падения g — размерность L/T^2 (именно тяжесть возвращает маятник в низшую точку и заставляет качаться).

Шаг 2. Предположи, что формула — это произведение этих величин в каких-то степенях. В этом вся идея метода: почти любая простая физическая зависимость имеет вид

$$T = (\text{безразмерное число}) \cdot L^a \cdot m^b \cdot g^c,$$

где показатели a , b , c пока неизвестны. Наша задача — найти именно их.

Шаг 3. Запиши размерность левой и правой части. Слева период — это чистое время, размерность T (можно записать как $L^0 \cdot M^0 \cdot T^1$). Справа перемножаем размерности множителей:

$$L^a \cdot M^b \cdot (L/T^2)^c = L^{a+c} \cdot M^b \cdot T^{-2c}.$$

Шаг 4. Приравняй показатели при каждой базовой единице ОТДЕЛЬНО. Вот сердце метода: метр невозможно превратить в секунду, поэтому степени при L , при M и при T должны совпасть слева и справа — каждая сама по себе. Слева L в степени 0, M в степени 0, T в степени 1. Значит:

- при M : $b = 0$;
- при T : $-2c = 1$;

- при **L**: $a + c = 0$.

Шаг 5. Реши эту простую систему.

- Из первого уравнения: **b = 0** — масса вообще не входит в формулу! Тяжёлый и лёгкий грузы качаются одинаково.
- Из второго: $c = -1/2$.
- Тогда из третьего: $a = -c = +1/2$.

Подставляем показатели обратно ($a = 1/2$, $b = 0$, $c = -1/2$):

$$T \sim L^{1/2} \cdot g^{-1/2} = \sqrt{L/g}.$$

Точная формула $T = 2\pi\sqrt{L/g}$; множитель 2π размерность угадать не может. Но всю структуру — что период растёт как корень из длины, убывает как корень из g и совсем не зависит от массы — мы вытащили буквально из воздуха.

$$T = 2\pi\sqrt{(L / g)}$$

Период маятника: зависит от длины и g , но не от массы.

🤔 **А знаешь ли ты?** То, что масса выпала из формулы, — не случайность, а глубокий факт: инертная масса (которая в $F=ma$) равна гравитационной (которая тянет вниз). Именно на этом Эйнштейн построил общую теорию относительности.

Проверим числом. Маятник длиной $L = 1$ м: $T = 2\pi\sqrt{1/9,8} = 2\pi \times 0,319 \approx \mathbf{2,0}$ с. Секундный маятник (полупериод 1 с) имеет длину около 0,99 м — почти метр. Отсюда, кстати, историческая попытка определить метр через маятник.

Скорость волн на воде

Теперь тот же приём для скорости v длинной волны на воде глубиной h (это волна, у которой длина много больше глубины, — например, волна цунами). Идём по тем же пяти шагам.

Шаг 1. От чего зависит скорость? Кандидаты:

- глубина h — размерность L ;
- ускорение свободного падения g — размерность L/T^2 (именно тяжесть тянет приподнятую воду вниз и гонит волну вперёд).

А плотность воды ρ ? Кажалось бы, тяжёлая вода должна двигаться иначе. Но в размерность плотности входит масса: $\rho = M/L^3$. А в нашем списке (h , g) больше **нет ни одной величины с массой**, и у самой скорости массы тоже нет (её размерность L/T). Значит, показатель при массе просто нечем уравновесить — масса обязана «сократиться», а сократиться ей не с чем, поэтому **плотность в формулу войти не может**. Красивый вывод: тяжёлая и лёгкая жидкость дают одинаковую скорость волн.

Шаг 2. Формула — произведение степеней: $v = (\text{число}) \cdot h^a \cdot g^c$.

Шаг 3. Размерности. Скорость слева — L/T (то есть $L^1 \cdot T^{-1}$). Справа:

$$h^a \cdot (L/T^2)^c = L^{a+c} \cdot T^{-2c}.$$

Шаг 4. Приравниваем показатели по отдельности:

- при T : $-2c = -1 \rightarrow c = 1/2$;
- при L : $a + c = 1 \rightarrow a = 1 - 1/2 = 1/2$.

Шаг 5. Итог: $v = h^{1/2} \cdot g^{1/2} = \sqrt{gh}$. Для длинных волн точная формула ровно такая — даже безразмерный коэффициент оказался равен единице:

$$v = \sqrt{(g \cdot h)}$$

Скорость длинной волны на воде глубиной h .

Проверим: цунами в океане глубиной 4000 м мчится со скоростью $\sqrt{(9,8 \times 4000)} = \sqrt{39200} \approx \mathbf{198 \text{ м/с}} \approx \mathbf{710 \text{ км/ч}}$ — скорость реактивного самолёта. Вот почему цунами так опасны: предупредить не успеваешь.

⚠ Частая ошибка: думать, что размерность даёт точную формулу. Нет — она даёт **структуру** (какие степени у переменных) и не видит безразмерных множителей (2π, 1/2). Но структура — это 90% дела.

⚠ Метод бессилён, когда величина зависит от **двух** параметров одной размерности (например, от двух длин): их отношение безразмерно, и размерность его не «поймает». Тогда нужен опыт или теория.

Система СИ — семь базовых единиц

Чтобы размерности имели смысл, договорились об эталонах. В СИ семь базовых единиц: **метр** (длина), **килограмм** (масса), **секунда** (время), **ампер** (ток), **кельвин** (температура), **моль** (количество вещества), **кандела** (сила света). Всё остальное — производные: ньютон = кг·м/с², джоуль = Н·м, ватт = Дж/с и так далее.



Опыт дома

Проверь формулу маятника собственными руками.

Возьми: нитку, гайку (или ключ) как груз, линейку, секундомер (телефон).

1. Подвесь груз на нитке длиной ровно $L = 1 \text{ м}$ (мерь от точки подвеса до центра груза).
2. Отклони на небольшой угол ($10\text{--}15^\circ$, не больше — иначе формула чуть врёт) и отпусти.
3. Засеки время **10 полных колебаний** (туда-обратно — это одно). Раздели на 10 — получишь период T .
4. Сравни с предсказанием 2,0 с. Должно сойтись в пределах пары процентов.
5. Теперь возьми груз вдвое тяжелее (две гайки) — период **не изменится**. Убедись сам, что масса выпала не зря.
6. Укороти нить вчетверо (до 25 см). Период должен упасть в $\sqrt{4} = 2$ раза, до $\sim 1,0$ с. Проверь!



Разбор примера

Задача. Проверь на размерность формулу для дальности полёта тела, брошенного горизонтально со скоростью v с высоты h : предлагается $L = v \cdot \sqrt{2h/g}$. Верна ли она размерностно?

Решение по шагам.

1. Левая часть — дальность, размерность L .
2. Разберём правую часть по кусочкам. Под корнем: h/g имеет размерность $L / (L/T^2) = T^2$. Корень из T^2 даёт T .
3. Умножаем на v (размерность L/T): $v \cdot \sqrt{2h/g} \rightarrow (L/T) \cdot T = L$.
4. Размерности совпали — формула допустима.

Проверим физику: время падения с высоты h есть $t = \sqrt{2h/g}$ (из $h = gt^2/2$), а дальность $L = v \cdot t$. Всё сходится, и множитель под корнем (2) тоже верный. Размерностный анализ пропустил бы неверный коэффициент, но структуру подтвердил.



Задачи

1. Какова размерность мощности $P = \text{работа} / \text{время}$? Вырази через M , L , T и назови единицу СИ.
2. Проверь на размерность формулу центростремительного ускорения $a = v^2/r$. Совпадает ли она с размерностью ускорения?
3. Тебе дали «формулу» силы $F = m \cdot v$ (масса на скорость). Докажи по размерности, что это не сила, а что-то другое. Что именно?
4. Угадай методом размерностей формулу для скорости тела, упавшего с высоты h (зависит от h и g). Затем сравни с точной $v = \sqrt{2gh}$.
5. Период обращения спутника T зависит от радиуса орбиты r , массы планеты M и гравитационной постоянной G (размерность $G = L^3/(M \cdot T^2)$). Найди, как T зависит от r по размерности (третий закон Кеплера!).
6. Проверь на размерность формулу давления столба жидкости $p = \rho gh$, где ρ — плотность (M/L^3). Должен получиться паскаль.
7. Цунами подходит к берегу, где глубина падает с 4000 м до 10 м. Во сколько раз замедляется волна? (Используй $v = \sqrt{gh}$.)
8. Энергию иногда записывают как $E = \frac{1}{2}I\omega^2$, где ω — угловая скорость (размерность $1/T$). Определи по размерности, какую размерность обязана иметь величина I (момент инерции).